Определимост на аритметиката в теория на изчислимостта

Мария И. Соскова

Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Задача: Да се опишат свойствата на наредбата в множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$.

1. Език: Ще използваме езика на предикатното смятане. Добавяме нов символ за наредбата $<$.
2. Аксиоми: Обичайните логически аксиоми и:

   D1 $\neg(x < x)$.
   D2 $x < y \ \&\ y < z \rightarrow x < z$.
   D3 $x < y \vee x = y \vee y < x$.
   D4 $x < y \rightarrow \exists z(x < z \ \&\ z < y)$.
   D5 $\exists y(x < y)$.
   D6 $\exists y(y < x)$.

3. Правила за извод: Обичайните логически закони, например $\frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$.

Така получаваме теорията *DLO* на гъстите линейни наредби без крайни точки.

Наредбата на рационалните числа

Задача: Да се опишат свойствата на наредбата в множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$.

1. Език: Ще използваме езика на предикатното смятане. Добавяме нов символ за наредбата $<$.
2. Аксиоми: Обичайните логически аксиоми и:

   D1 $\neg(x < x)$.
   D2 $x < y \;\&\; y < z \to x < z$.
   D3 $x < y \lor x = y \lor y < x$.
   D4 $x < y \to \exists z(x < z \;\&\; z < y)$.
   D5 $\exists y(x < y)$.
   D6 $\exists y(y < x)$.

3. Правила за извод: Обичайните логически закони, например $\frac{A,\ A \to B}{B}$.

Така получаваме теорията *DLO* на гъстите линейни наредби без крайни точки.

Наредбата на рационалните числа

Задача: Да се опишат свойствата на наредбата в множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$.

1. Език: Ще използваме езика на предикатното смятане. Добавяме нов символ за наредбата $<$.
2. Аксиоми: Обичайните логически аксиоми и:
   - D1 $\neg(x < x)$.
   - D2 $x < y \mathbin{\&} y < z \to x < z$.
   - D3 $x < y \vee x = y \vee y < x$.
   - D4 $x < y \to \exists z(x < z \mathbin{\&} z < y)$.
   - D5 $\exists y(x < y)$.
   - D6 $\exists y(y < x)$.
3. Правила за извод: Обичайните логически закони, например $\frac{A,\ A \to B}{B}$.

Така получаваме теорията *DLO* на гъстите линейни наредби без крайни точки.

Наредбата на рационалните числа

Задача: Да се опишат свойствата на наредбата в множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$.

1. Език: Ще използваме езика на предикатното смятане. Добавяме нов символ за наредбата $<$.
2. Аксиоми: Обичайните логически аксиоми и:

   D1 $\neg(x < x)$.
   D2 $x < y \ \& \ y < z \to x < z$.
   D3 $x < y \lor x = y \lor y < x$.
   D4 $x < y \to \exists z(x < z \ \& \ z < y)$.
   D5 $\exists y(x < y)$.
   D6 $\exists y(y < x)$.

3. Правила за извод: Обичайните логически закони, например $\frac{A, \ A \to B}{B}$.

Така получаваме теорията *DLO* на гъстите линейни наредби без крайни точки.

Наредбата на рационалните числа

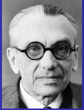
Задача: Да се опишат свойствата на наредбата в множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$.

1. Език: Ще използваме езика на предикатното смятане. Добавяме нов символ за наредбата $<$.
2. Аксиоми: Обичайните логически аксиоми и:

   D1 $\neg(x < x)$.
   D2 $x < y \;\&\; y < z \rightarrow x < z$.
   D3 $x < y \vee x = y \vee y < x$.
   D4 $x < y \rightarrow \exists z(x < z \;\&\; z < y)$.
   D5 $\exists y(x < y)$.
   D6 $\exists y(y < x)$.

3. Правила за извод: Обичайните логически закони, например $\frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$.

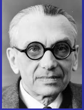
Така получаваме теорията *DLO* на гъстите линейни наредби без крайни точки.



Семантика / Синтаксис

- Теорията *DLO* е синтактичен обект. Теоремите на *DLO* са твърденията, формално изводими от аксиомите с помощта на правилата за извод.
  Пример: От $\exists y(x < y)$ и $x < y \to \exists z(x < z \ \& \ y < z)$ формално следва, че $\exists y \exists z(x < z \ \& \ z < y)$.
- Структурата на рационалните числа с обичайната наредба $(\mathbb{Q}, <)$ е модел на *DLO*. За рационалните числа можем също да изказваме твърдения, които са верни.
  Пример: Всяко рационално число се намира в непразен отворен интервал с рационални краища.

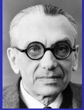
Теорема. *[Гьодел 1929] Теоремите на една теория са точно твърденията, които се верни във всеки неин модел.*



Семантика / Синтаксис

- Теорията *DLO* е синтактичен обект. Теоремите на *DLO* са твърденията, формално изводими от аксиомите с помощта на правилата за извод.
  Пример: От $\exists y(x < y)$ и $x < y \to \exists z(x < z \,\&\, y < z)$ формално следва, че $\exists y \exists z(x < z \,\&\, z < y)$.
- Структурата на рационалните числа с обичайната наредба $(\mathbb{Q}, <)$ е модел на *DLO*. За рационалните числа можем също да изказваме твърдения, които са верни.
  Пример: Всяко рационално число се намира в непразен отворен интервал с рационални краища.

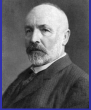
Теорема. *[Гьодел 1929] Теоремите на една теория са точно твърденията, които се верни във всеки неин модел.*



Семантика / Синтаксис

- Теорията *DLO* е синтактичен обект. Теоремите на *DLO* са твърденията, формално изводими от аксиомите с помощта на правилата за извод.
  Пример: От $\exists y(x < y)$ и $x < y \to \exists z(x < z \;\&\; y < z)$ формално следва, че $\exists y \exists z(x < z \;\&\; z < y)$.
- Структурата на рационалните числа с обичайната наредба $(\mathbb{Q}, <)$ е модел на *DLO*. За рационалните числа можем също да изказваме твърдения, които са верни.
  Пример: Всяко рационално число се намира в непразен отворен интервал с рационални краища.

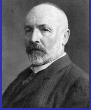
Теорема. *[Гьодел 1929] Теоремите на една теория са точно твърденията, които се верни във всеки неин модел.*



Предимството на синтактичния подход

- Кантор показва, че *DLO* е пълна теория: за всяко твърдение φ на този език или φ, или $\neg\varphi$ може формално да се изведе от *DLO*.
- Следователно верните твърдения в структурата $(\mathbb{Q}, <)$ съвпадат с теоремите на *DLO*.
- Имаме механичен метод (програма), който генерира всички твърдения, които следват формално от аксиомите. Множеството от теоремите на *DLO* е рекурсивно номеруемо.
- Следователно имаме метод, който по дадена формула φ за краен брой стъпки установява дали тя е вярна или не. Теорията *DLO* е разрешима.

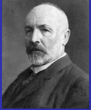
Множеството от верните твърдения в $(\mathbb{Q}, <)$ е разрешимо.



Предимството на синтактичния подход

- Кантор показва, че *DLO* е пълна теория: за всяко твърдение φ на този език или φ, или $\neg\varphi$ може формално да се изведе от *DLO*.
- Следователно верните твърдения в структурата $(\mathbb{Q}, <)$ съвпадат с теоремите на *DLO*.
- Имаме механичен метод (програма), който генерира всички твърдения, които следват формално от аксиомите. Множеството от теоремите на *DLO* е рекурсивно номеруемо.
- Следователно имаме метод, който по дадена формула φ за краен брой стъпки установява дали тя е вярна или не. Теорията *DLO* е разрешима.

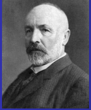
Множеството от верните твърдения в $(\mathbb{Q}, <)$ е разрешимо.



Предимството на синтактичния подход

- Кантор показва, че *DLO* е пълна теория: за всяко твърдение φ на този език или φ, или $\neg\varphi$ може формално да се изведе от *DLO*.
- Следователно верните твърдения в структурата $(\mathbb{Q}, <)$ съвпадат с теоремите на *DLO*.
- Имаме механичен метод (програма), който генерира всички твърдения, които следват формално от аксиомите. Множеството от теоремите на *DLO* е рекурсивно номеруемо.
- Следователно имаме метод, който по дадена формула φ за краен брой стъпки установява дали тя е вярна или не. Теорията *DLO* е разрешима.

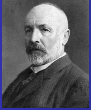
Множеството от верните твърдения в $(\mathbb{Q}, <)$ е разрешимо.



Предимството на синтактичния подход

- Кантор показва, че *DLO* е пълна теория: за всяко твърдение φ на този език или φ, или $\neg\varphi$ може формално да се изведе от *DLO*.
- Следователно верните твърдения в структурата $(\mathbb{Q}, <)$ съвпадат с теоремите на *DLO*.
- Имаме механичен метод (програма), който генерира всички твърдения, които следват формално от аксиомите. Множеството от теоремите на *DLO* е рекурсивно номеруемо.
- Следователно имаме метод, който по дадена формула φ за краен брой стъпки установява дали тя е вярна или не. Теорията *DLO* е разрешима.

Множеството от верните твърдения в $(\mathbb{Q}, <)$ е разрешимо.



Предимството на синтактичния подход

- Кантор показва, че *DLO* е пълна теория: за всяко твърдение φ на този език или φ, или $\neg\varphi$ може формално да се изведе от *DLO*.
- Следователно верните твърдения в структурата $(\mathbb{Q}, <)$ съвпадат с теоремите на *DLO*.
- Имаме механичен метод (програма), който генерира всички твърдения, които следват формално от аксиомите. Множеството от теоремите на *DLO* е рекурсивно номеруемо.
- Следователно имаме метод, който по дадена формула φ за краен брой стъпки установява дали тя е вярна или не. Теорията *DLO* е разрешима.

Множеството от верните твърдения в $(\mathbb{Q}, <)$ е разрешимо.

Полето на комплексните числа

Задача: Да се опишат свойствата на полето на комплексните числа, $\mathbb{C}$.

1. Език: Добавяме константите $0, 1, -1$ и символи за функциите $+, *$.
2. Аксиоми: Добавяме аксиомите:

F1	$(x+y)+z = x+(y+z)$.	F6	$x*1 = x$.
F2	$x+0 = x$.	F7	$x \neq 0 \to \exists y(x*y=1)$.
F3	$x+(-1*x) = 0$.	F8	$x*y = y*x$.
F4	$x+y = y+x$.	F9	$x*(y+z) = x*y+x*z$.
F5	$(x*y)*z = x*(y*z)$.	F10	$0 \neq 1$.

ACl: За $n \geq 1$: всеки полином от n-та степен има корен. Например при $n=2$: $y \neq 0 \to \exists x(y*x*x+z*x+w=0)$.

Ch: За $n \geq 2$, характеристиката не е n. Например при $n=2$: $1+1 \neq 0$.

Така получаваме теорията $ACF(0)$ на алгебрично затворените полета с характеристика 0.

Задача: Да се опишат свойствата на полето на комплексните числа, $\mathbb{C}$.

1. Език: Добавяме константите $0, 1, -1$ и символи за функциите $+, *$.
2. Аксиоми: Добавяме аксиомите:

F1	$(x+y)+z = x+(y+z)$.	F6	$x*1 = x$.
F2	$x+0 = x$.	F7	$x \neq 0 \to \exists y(x*y = 1)$.
F3	$x+(-1*x) = 0$.	F8	$x*y = y*x$.
F4	$x+y = y+x$.	F9	$x*(y+z) = x*y+x*z$.
F5	$(x*y)*z = x*(y*z)$.	F10	$0 \neq 1$.

ACl: За $n \geq 1$: всеки полином от n-та степен има корен.
Например при $n = 2$: $y \neq 0 \to \exists x(y*x*x+z*x+w = 0)$.
Ch: За $n \geq 2$, характеристиката не е n.
Например при $n = 2$: $1+1 \neq 0$.

Така получаваме теорията $ACF(0)$ на алгебрично затворените полета с характеристика 0.

Задача: Да се опишат свойствата на полето на комплексните числа, $\mathbb{C}$.

1. Език: Добавяме константите $0, 1, -1$ и символи за функциите $+, *$.
2. Аксиоми: Добавяме аксиомите:

F1 $(x + y) + z = x + (y + z)$.
F2 $x + 0 = x$.
F3 $x + (-1 * x) = 0$.
F4 $x + y = y + x$.
F5 $(x * y) * z = x * (y * z)$.
F6 $x * 1 = x$.
F7 $x \neq 0 \to \exists y(x * y = 1)$.
F8 $x * y = y * x$.
F9 $x * (y + z) = x * y + x * z$.
F10 $0 \neq 1$.

ACl: За $n \geq 1$: всеки полином от n-та степен има корен. Например при $n = 2$: $y \neq 0 \to \exists x(y * x * x + z * x + w = 0)$.
Ch: За $n \geq 2$, характеристиката не е n. Например при $n = 2$: $1 + 1 \neq 0$.

Така получаваме теорията $ACF(0)$ на алгебрично затворените полета с характеристика 0.

Полето на комплексните числа

Задача: Да се опишат свойствата на полето на комплексните числа, $\mathbb{C}$.

1. Език: Добавяме константите $0, 1, -1$ и символи за функциите $+, *$.
2. Аксиоми: Добавяме аксиомите:

F1	$(x+y)+z = x+(y+z)$.	F6	$x*1 = x$.
F2	$x+0 = x$.	F7	$x \neq 0 \rightarrow \exists y(x*y = 1)$.
F3	$x+(-1*x) = 0$.	F8	$x*y = y*x$.
F4	$x+y = y+x$.	F9	$x*(y+z) = x*y+x*z$.
F5	$(x*y)*z = x*(y*z)$.	F10	$0 \neq 1$.

ACl: За $n \geq 1$: всеки полином от n-та степен има корен.
Например при $n = 2$: $y \neq 0 \rightarrow \exists x(y*x*x+z*x+w = 0)$.
Ch: За $n \geq 2$, характеристиката не е n.
Например при $n = 2$: $1+1 \neq 0$.

Така получаваме теорията $ACF(0)$ на алгебрично затворените полета с характеристика 0.

Задача: Да се опишат свойствата на полето на комплексните числа, $\mathbb{C}$.

1. Език: Добавяме константите $0, 1, -1$ и символи за функциите $+, *$.
2. Аксиоми: Добавяме аксиомите:

F1	$(x+y)+z = x+(y+z)$.	F6	$x*1 = x$.
F2	$x+0 = x$.	F7	$x \neq 0 \to \exists y(x*y = 1)$.
F3	$x+(-1*x) = 0$.	F8	$x*y = y*x$.
F4	$x+y = y+x$.	F9	$x*(y+z) = x*y + x*z$.
F5	$(x*y)*z = x*(y*z)$.	F10	$0 \neq 1$.

ACl: За $n \geq 1$: всеки полином от n-та степен има корен.
Например при $n = 2$: $y \neq 0 \to \exists x(y*x*x + z*x + w = 0)$.
Ch: За $n \geq 2$, характеристиката не е n.
Например при $n = 2$: $1+1 \neq 0$.

Така получаваме теорията $ACF(0)$ на алгебрично затворените полета с характеристика 0.

Задача: Да се опишат свойствата на полето на комплексните числа, $\mathbb{C}$.

1. Език: Добавяме константите $0, 1, -1$ и символи за функциите $+, *$.
2. Аксиоми: Добавяме аксиомите:

F1 $(x + y) + z = x + (y + z)$.
F2 $x + 0 = x$.
F3 $x + (-1 * x) = 0$.
F4 $x + y = y + x$.
F5 $(x * y) * z = x * (y * z)$.
F6 $x * 1 = x$.
F7 $x \neq 0 \to \exists y(x * y = 1)$.
F8 $x * y = y * x$.
F9 $x * (y + z) = x * y + x * z$.
F10 $0 \neq 1$.

ACl: За $n \geq 1$: всеки полином от n-та степен има корен.
Например при $n = 2$: $y \neq 0 \to \exists x(y * x * x + z * x + w = 0)$.
Ch: За $n \geq 2$, характеристиката не е n.
Например при $n = 2$: $1 + 1 \neq 0$.

Така получаваме теорията $ACF(0)$ на алгебрично затворените полета с характеристика 0.

Разрешимост на $ACF(0)$

- $(\mathbb{C}, 0, 1, -1, +, *)$ е модел на $ACF(0)$, следователно теорията е непротиворечива.

Теорема. *[Тарски 1931] $ACF(0)$ е пълна теория.*

- Множеството от аксиомите на $ACF(0)$ е по-сложно, но все пак разрешимо и отново имаме механичен метод (програма), който генерира всички твърдения, които следват формално от аксиомите.
- Следователно теорията $ACF(0)$ е разрешима и множеството от верните твърдения в $(\mathbb{C}, 0, 1, -1, +, *)$ е разрешимо.

Разрешимост на $ACF(0)$

- $(\mathbb{C}, 0, 1, -1, +, *)$ е модел на $ACF(0)$, следователно теорията е непротиворечива.

Теорема. *[Тарски 1931] $ACF(0)$ е пълна теория.*

- Множеството от аксиомите на $ACF(0)$ е по-сложно, но все пак разрешимо и отново имаме механичен метод (програма), който генерира всички твърдения, които следват формално от аксиомите.
- Следователно теорията $ACF(0)$ е разрешима и множеството от верните твърдения в $(\mathbb{C}, 0, 1, -1, +, *)$ е разрешимо.

Разрешимост на $ACF(0)$

- $(\mathbb{C}, 0, 1, -1, +, *)$ е модел на $ACF(0)$, следователно теорията е непротиворечива.

Теорема. *[Тарски 1931] $ACF(0)$ е пълна теория.*

- Множеството от аксиомите на $ACF(0)$ е по-сложно, но все пак разрешимо и отново имаме механичен метод (програма), който генерира всички твърдения, които следват формално от аксиомите.
- Следователно теорията $ACF(0)$ е разрешима и множеството от верните твърдения в $(\mathbb{C}, 0, 1, -1, +, *)$ е разрешимо.

Разрешимост на $ACF(0)$

- $(\mathbb{C}, 0, 1, -1, +, *)$ е модел на $ACF(0)$, следователно теорията е непротиворечива.

Теорема. *[Тарски 1931] $ACF(0)$ е пълна теория.*

- Множеството от аксиомите на $ACF(0)$ е по-сложно, но все пак разрешимо и отново имаме механичен метод (програма), който генерира всички твърдения, които следват формално от аксиомите.
- Следователно теорията $ACF(0)$ е разрешима и множеството от верните твърдения в $(\mathbb{C}, 0, 1, -1, +, *)$ е разрешимо.

Аритметиката от първи ред

Да разгледаме следната крайна теория, N.

1. Език: Добавяме константата 0, символи за функциите $s, +, *$ и релацията $<$.
2. Аксиоми: Добавяме аксиомите:

N1 $s(x) \neq 0$.
N2 $s(x) = s(y) \to x = y$.
N3 $x + 0 = x$.
N4 $x + s(y) = s(x + y)$.
N5 $x * 0 = 0$.
N6 $x * s(y) = x * y + x$.
N7 $\neg(x < 0)$.
N8 $x < s(y) \leftrightarrow x < y \lor x = y$.
N9 $x < y \lor x = y \lor y < x$.

- Множеството на естествените числа $\mathbb{N}$, с обичайните аритметични действия е модел на N, стандартен модел на аритметиката. Следователно N е непротиворечива.
- Всяка разумна аксиоматика на аритметиката би трябвало да включва/ извежда тези 9 твърдения.

Да разгледаме следната крайна теория, N.

1. Език: Добавяме константата 0, символи за функциите $s, +, *$ и релацията $<$.
2. Аксиоми: Добавяме аксиомите:

N1 $s(x) \neq 0.$
N2 $s(x) = s(y) \to x = y.$
N3 $x + 0 = x.$
N4 $x + s(y) = s(x + y).$
N5 $x * 0 = 0.$
N6 $x * s(y) = x * y + x.$
N7 $\neg(x < 0).$
N8 $x < s(y) \leftrightarrow x < y \vee x = y.$
N9 $x < y \vee x = y \vee y < x.$

- Множеството на естествените числа $\mathbb{N}$, с обичайните аритметични действия е модел на N, стандартен модел на аритметиката. Следователно N е непротиворечива.
- Всяка разумна аксиоматика на аритметиката би трябвало да включва/ извежда тези 9 твърдения.

Да разгледаме следната крайна теория, N.

1. Език: Добавяме константата 0, символи за функциите $s, +, *$ и релацията $<$.
2. Аксиоми: Добавяме аксиомите:

N1 $s(x) \neq 0$.
N2 $s(x) = s(y) \to x = y$.
N3 $x + 0 = x$.
N4 $x + s(y) = s(x + y)$.
N5 $x * 0 = 0$.
N6 $x * s(y) = x * y + x$.
N7 $\neg(x < 0)$.
N8 $x < s(y) \leftrightarrow x < y \vee x = y$.
N9 $x < y \vee x = y \vee y < x$.

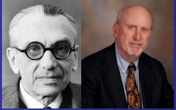
- Множеството на естествените числа $\mathbb{N}$, с обичайните аритметични действия е модел на N, стандартен модел на аритметиката. Следователно N е непротиворечива.
- Всяка разумна аксиоматика на аритметиката би трябвало да включва/ извежда тези 9 твърдения.

Да разгледаме следната крайна теория, N.

1. Език: Добавяме константата 0, символи за функциите $s, +, *$ и релацията $<$.
2. Аксиоми: Добавяме аксиомите:

N1 $s(x) \neq 0.$
N2 $s(x) = s(y) \to x = y.$
N3 $x + 0 = x.$
N4 $x + s(y) = s(x + y).$
N5 $x * 0 = 0.$
N6 $x * s(y) = x * y + x.$
N7 $\neg(x < 0).$
N8 $x < s(y) \leftrightarrow x < y \lor x = y.$
N9 $x < y \lor x = y \lor y < x.$

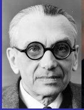
- Множеството на естествените числа $\mathbb{N}$, с обичайните аритметични действия е модел на N, стандартен модел на аритметиката. Следователно N е непротиворечива.
- Всяка разумна аксиоматика на аритметиката би трябвало да включва/ извежда тези 9 твърдения.



Непълнота на аритметиката

Теорема.[*Гьодел 1931, Росър 1936*] *Ако T е непротиворечива теория, с разрешимо множество от аксиоми, в която формално могат да се изведат теоремите на N, то T е непълна.*

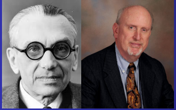
- Няма надежда за приемлива теория, която напълно да описва свойствата на аритметиката.
- В частност множеството от верните твърдения в стандартния модел на аритметиката $(\mathbb{N}, 0, s, +, *, <)$ не е разрешимо.



Непълнота на аритметиката

Теорема. *[Гьодел 1931, Росър 1936] Ако T е непротиворечива теория, с разрешимо множество от аксиоми, в която формално могат да се изведат теоремите на N, то T е непълна.*

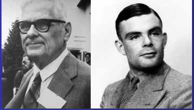
- Няма надежда за приемлива теория, която напълно да описва свойствата на аритметиката.
- В частност множеството от верните твърдения в стандартния модел на аритметиката $(\mathbb{N}, 0, s, +, *, <)$ не е разрешимо.



Непълнота на аритметиката

Теорема. *[Гьодел 1931, Росър 1936] Ако T е непротиворечива теория, с разрешимо множество от аксиоми, в която формално могат да се изведат теоремите на N, то T е непълна.*

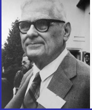
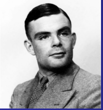
- Няма надежда за приемлива теория, която напълно да описва свойствата на аритметиката.
- В частност множеството от верните твърдения в стандартния модел на аритметиката $(\mathbb{N}, 0, s, +, *, <)$ не е разрешимо.



Силна неразрешимост на аритметиката

Теорема.*[Чърч, Тюринг 1936] Ако T е непротиворечива теория, в която формално могат да се изведат теоремите на N, то T е неразрешима.*

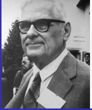
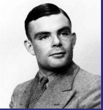
- В частност, множеството от логически следствия на N е неразрешимо.
- Стандартният модел на аритметиката е силно неразрешим. Ако T е теория, с модел $(\mathbb{N}, 0, s, +, *, <)$, то T е неразрешима.



Силна неразрешимост на аритметиката

Теорема.*[Чърч, Тюринг 1936] Ако T е непротиворечива теория, в която формално могат да се изведат теоремите на N, то T е неразрешима.*

- В частност, множеството от логически следствия на N е неразрешимо.
- Стандартният модел на аритметиката е силно неразрешим. Ако T е теория, с модел $(\mathbb{N}, 0, s, +, *, <)$, то T е неразрешима.

Силна неразрешимост на аритметиката

Теорема.[*Чърч, Тюринг 1936*] *Ако T е непротиворечива теория, в която формално могат да се изведат теоремите на N, то T е неразрешима.*

- В частност, множеството от логически следствия на N е неразрешимо.
- Стандартният модел на аритметиката е силно неразрешим. Ако T е теория, с модел $(\mathbb{N}, 0, s, +, *, <)$, то T е неразрешима.

Десети проблем на Хилберт

Теорема.[*Дейвис, Робинсон, Пътнам, Матиасевич*] *Всяко рекурсивно номеруемо множество W може да се определи с екзистенциална формула:*

$$W = \{n \mid \exists y_1 \ldots \exists y_n (p(n, y_1, \ldots y_n) = 0)\}$$

- Дори да се ограничим само до верните твърдения в стандартния модел на аритметиката, които използват само екзистенциални квантори, отново получаваме неразрешимо множество.

Десети проблем на Хилберт

Теорема. *[Дейвис, Робинсон, Пътнам, Матиасевич] Всяко рекурсивно номеруемо множество W може да се определи с екзистенциална формула:*

$$W = \{n \mid \exists y_1 \ldots \exists y_n (p(n, y_1, \ldots y_n) = 0)\}$$

- Дори да се ограничим само до верните твърдения в стандартния модел на аритметиката, които използват само екзистенциални квантори, отново получаваме неразрешимо множество.

Да разгледаме пръстена на целите числа, $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, *)$. В тази структура можем да определим (интерпретираме) аритметиката:

1. Съгласно теорема на Лагранж всяко естествено число може да се представи като сума на четири точни квадрата; $\varphi_{\mathbb{N}}(x): \quad \exists u \exists v \exists y \exists z (x = u * u + v * v + y * y + z * z)$.
2. Константата 0, $+$ и $*$ се интерпретират както в пръстена.
3. $s(x)$ се интерпретира с $x + 1$.
4. $x < y$ се интерпретира с $\exists z (x + z + 1 = y)$.

Пример: $N6: \quad x * s(y) = x * y + x$ се превежда като $\varphi_{\mathbb{N}}(x) \ \& \ \varphi_{\mathbb{N}}(y) \rightarrow x * (y + 1) = x * y + x$.

Да разгледаме пръстена на целите числа, $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, *)$. В тази структура можем да определим (интерпретираме) аритметиката:

1. Съгласно теорема на Лагранж всяко естествено число може да се представи като сума на четири точни квадрата; $\varphi_{\mathbb{N}}(x) : \quad \exists u \exists v \exists y \exists z (x = u * u + v * v + y * y + z * z)$.
2. Константата 0, $+$ и $*$ се интерпретират както в пръстена.
3. $s(x)$ се интерпретира с $x + 1$.
4. $x < y$ се интерпретира с $\exists z (x + z + 1 = y)$.

Пример: $N6 : \quad x * s(y) = x * y + x$ се превежда като $\varphi_{\mathbb{N}}(x) \ \& \ \varphi_{\mathbb{N}}(y) \rightarrow x * (y + 1) = x * y + x$.

Определимост на аритметиката в други структури

Да разгледаме пръстена на целите числа, $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, *)$. В тази структура можем да определим (интерпретираме) аритметиката:

1. Съгласно теорема на Лагранж всяко естествено число може да се представи като сума на четири точни квадрата; $\varphi_{\mathbb{N}}(x) : \quad \exists u \exists v \exists y \exists z(x = u * u + v * v + y * y + z * z)$.
2. Константата 0, $+$ и $*$ се интерпретират както в пръстена.
3. $s(x)$ се интерпретира с $x + 1$.
4. $x < y$ се интерпретира с $\exists z(x + z + 1 = y)$.

Пример: $N6 : \quad x * s(y) = x * y + x$ се превежда като $\varphi_{\mathbb{N}}(x) \ \& \ \varphi_{\mathbb{N}}(y) \to x * (y + 1) = x * y + x$.

Да разгледаме пръстена на целите числа, $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, *)$. В тази структура можем да определим (интерпретираме) аритметиката:

1. Съгласно теорема на Лагранж всяко естествено число може да се представи като сума на четири точни квадрата; $\varphi_{\mathbb{N}}(x): \quad \exists u \exists v \exists y \exists z (x = u * u + v * v + y * y + z * z)$.
2. Константата 0, $+$ и $*$ се интерпретират както в пръстена.
3. $s(x)$ се интерпретира с $x + 1$.
4. $x < y$ се интерпретира с $\exists z (x + z + 1 = y)$.

Пример: $N6: \quad x * s(y) = x * y + x$ се превежда като $\varphi_{\mathbb{N}}(x)\ \&\ \varphi_{\mathbb{N}}(y) \rightarrow x * (y + 1) = x * y + x$.

Да разгледаме пръстена на целите числа, $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, *)$. В тази структура можем да определим (интерпретираме) аритметиката:

1. Съгласно теорема на Лагранж всяко естествено число може да се представи като сума на четири точни квадрата; $\varphi_{\mathbb{N}}(x): \quad \exists u \exists v \exists y \exists z (x = u * u + v * v + y * y + z * z)$.
2. Константата 0, $+$ и $*$ се интерпретират както в пръстена.
3. $s(x)$ се интерпретира с $x + 1$.
4. $x < y$ се интерпретира с $\exists z (x + z + 1 = y)$.

Пример: $N6: \quad x * s(y) = x * y + x$ се превежда като $\varphi_{\mathbb{N}}(x) \;\&\; \varphi_{\mathbb{N}}(y) \rightarrow x * (y + 1) = x * y + x$.

Да разгледаме пръстена на целите числа, $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, *)$. В тази структура можем да определим (интерпретираме) аритметиката:

1. Съгласно теорема на Лагранж всяко естествено число може да се представи като сума на четири точни квадрата; $\varphi_{\mathbb{N}}(x): \quad \exists u \exists v \exists y \exists z (x = u * u + v * v + y * y + z * z)$.
2. Константата 0, $+$ и $*$ се интерпретират както в пръстена.
3. $s(x)$ се интерпретира с $x + 1$.
4. $x < y$ се интерпретира с $\exists z(x + z + 1 = y)$.

Пример: $N6: \quad x * s(y) = x * y + x$ се превежда като $\varphi_{\mathbb{N}}(x) \ \& \ \varphi_{\mathbb{N}}(y) \rightarrow x * (y + 1) = x * y + x$.

Определимост на аритметиката

Теорема. *[Тарски] Ако една структура $\mathcal{A}$ е силно неразрешима и определима в структура $\mathcal{B}$, то и $\mathcal{B}$ е силно неразрешима.*

Следствие. *Теорията на пръстените е неразрешима.*

Теорема. *[Робинсон 1948] Стандартният модел на аритметиката е определим в полето на рационалните числа, $(\mathbb{Q}, 0, 1, -1, +, *)$.*

Следствие. *Теорията на полетата с характеристика 0 е неразрешима.*


Определимост на аритметиката

Теорема. *[Тарски] Ако една структура $\mathcal{A}$ е силно неразрешима и определима в структура $\mathcal{B}$, то и $\mathcal{B}$ е силно неразрешима.*

Следствие. *Теорията на пръстените е неразрешима.*

Теорема. *[Робинсон 1948] Стандартният модел на аритметиката е определим в полето на рационалните числа, $(\mathbb{Q}, 0, 1, -1, +, *)$.*

Следствие. *Теорията на полетата с характеристика 0 е неразрешима.*

Определимост на аритметиката

Теорема. *[Тарски] Ако една структура $\mathcal{A}$ е силно неразрешима и определима в структура $\mathcal{B}$, то и $\mathcal{B}$ е силно неразрешима.*

Следствие. *Теорията на пръстените е неразрешима.*

Теорема. *[Робинсон 1948] Стандартният модел на аритметиката е определим в полето на рационалните числа, $(\mathbb{Q}, 0, 1, -1, +, *)$.*

Следствие. *Теорията на полетата с характеристика 0 е неразрешима.*

Определимост на аритметиката

Теорема. *[Тарски] Ако една структура $\mathcal{A}$ е силно неразрешима и определима в структура $\mathcal{B}$, то и $\mathcal{B}$ е силно неразрешима.*

Следствие. *Теорията на пръстените е неразрешима.*

Теорема. *[Робинсон 1948] Стандартният модел на аритметиката е определим в полето на рационалните числа, $(\mathbb{Q}, 0, 1, -1, +, *)$.*

Следствие. *Теорията на полетата с характеристика 0 е неразрешима.*

Номерационна сводимост

Определение.[Фридберг, Роджърс 1959] Едно множество от естествени числа A е номерационно сводимо (е-сводимо) към множество от естествени числа B, ако съществува ефективен метод, който преобразува всяка номерация на B в номерация на A.

$A \leq_e B$, ако съществува рекурсивно номеруемо множество W, което се състои от двойки естествено число и крайно множество $\langle x, D \rangle$, такова че:

$$x \in A \iff \exists D(\langle x, D \rangle \in W \ \& \ D \subseteq B).$$

Номерационна сводимост

Определение.[Фридберг, Роджърс 1959] Едно множество от естествени числа A е номерационно сводимо (е-сводимо) към множество от естествени числа B, ако съществува ефективен метод, който преобразува всяка номерация на B в номерация на A.

$A \leq_e B$, ако съществува рекурсивно номеруемо множество W, което се състои от двойки естествено число и крайно множество $\langle x, D \rangle$, такова че:

$$x \in A \iff \exists D(\langle x, D \rangle \in W \ \& \ D \subseteq B).$$

- Номерационна степен на множеството A е $d_e(A) = \{B \mid A \leq_e B \ \&\ B \leq_e A\}$
- Наредбата между степените е $d_e(A) \leq d_e(B)$, ако $A \leq_e B$.
- Най-малък елемент е $\mathbf{0}_e = d_e(\emptyset)$, множеството на всички рекурсивно номеруеми множества.
- Нека с D_e означим множеството от всички номерационни степени. $\mathcal{D}_e = (D_e, \leq)$ наричаме структурата на е-степените.

Структурата на номерационните степени $\mathcal{D}_e$

- Номерационна степен на множеството A е $d_e(A) = \{B \mid A \leq_e B \ \& \ B \leq_e A\}$
- Наредбата между степените е $d_e(A) \leq d_e(B)$, ако $A \leq_e B$.
- Най-малък елемент е $\mathbf{0}_e = d_e(\emptyset)$, множеството на всички рекурсивно номеруеми множества.
- Нека с D_e означим множеството от всички номерационни степени. $\mathcal{D}_e = (D_e, \leq)$ наричаме структурата на е-степените.

- Номерационна степен на множеството A е $d_e(A) = \{B \mid A \leq_e B \ \& \ B \leq_e A\}$
- Наредбата между степените е $d_e(A) \leq d_e(B)$, ако $A \leq_e B$.
- Най-малък елемент е $\mathbf{0}_e = d_e(\emptyset)$, множеството на всички рекурсивно номеруеми множества.
- Нека с D_e означим множеството от всички номерационни степени. $\mathcal{D}_e = (D_e, \leq)$ наричаме структурата на е-степените.

Структурата на номерационните степени $\mathcal{D}_e$

- Номерационна степен на множеството A е $d_e(A) = \{B \mid A \leq_e B \ \& \ B \leq_e A\}$
- Наредбата между степените е $d_e(A) \leq d_e(B)$, ако $A \leq_e B$.
- Най-малък елемент е $\mathbf{0}_e = d_e(\emptyset)$, множеството на всички рекурсивно номеруеми множества.
- Нека с D_e означим множеството от всички номерационни степени. $\mathcal{D}_e = (D_e, \leq)$ наричаме структурата на е-степените.

Искаме да се ограничим до структура, за която можем да говорим на езика на аритметиката.

- Рекурсивно номеруемите множества съответстват точно на множествата, които могат да се определят с формула от вида $\exists x \varphi$. Затова те се наричат Σ_1 множества
- Ние ще ограничим структурата на номерационните степени до степени на множества от следващата сложност: Σ_2, множествата които се определят с формулите от вида $\exists x \forall y \varphi$.
- Нека с G_e означим множеството от всички номерационни степени на Σ_2 множества. $\mathcal{G}_e = (G_e, \leq)$ наричаме локалната структура на e-степените.
- Структурата $\mathcal{G}_e$ е определима в стандартния модел на аритметиката.

Локалната структура на номерационните степени, $\mathcal{G}_e$

Искаме да се ограничим до структура, за която можем да говорим на езика на аритметиката.

- Рекурсивно номеруемите множества съответстват точно на множествата, които могат да се определят с формула от вида $\exists x \varphi$. Затова те се наричат Σ_1 множества
- Ние ще ограничим структурата на номерационните степени до степени на множества от следващата сложност: Σ_2, множествата които се определят с формулите от вида $\exists x \forall y \varphi$.
- Нека с G_e означим множеството от всички номерационни степени на Σ_2 множества. $\mathcal{G}_e = (G_e, \leq)$ наричаме локалната структура на е-степените.
- Структурата $\mathcal{G}_e$ е определима в стандартния модел на аритметиката.

Искаме да се ограничим до структура, за която можем да говорим на езика на аритметиката.

- Рекурсивно номеруемите множества съответстват точно на множествата, които могат да се определят с формула от вида $\exists x \varphi$. Затова те се наричат Σ_1 множества
- Ние ще ограничим структурата на номерационните степени до степени на множества от следващата сложност: Σ_2, множествата които се определят с формулите от вида $\exists x \forall y \varphi$.
- Нека с G_e означим множеството от всички номерационни степени на Σ_2 множества. $\mathcal{G}_e = (G_e, \leq)$ наричаме локалната структура на е-степените.
- Структурата $\mathcal{G}_e$ е определима в стандартния модел на аритметиката.

Искаме да се ограничим до структура, за която можем да говорим на езика на аритметиката.

- Рекурсивно номеруемите множества съответстват точно на множествата, които могат да се определят с формула от вида $\exists x \varphi$. Затова те се наричат Σ_1 множества
- Ние ще ограничим структурата на номерационните степени до степени на множества от следващата сложност: Σ_2, множествата които се определят с формулите от вида $\exists x \forall y \varphi$.
- Нека с G_e означим множеството от всички номерационни степени на Σ_2 множества. $\mathcal{G}_e = (G_e, \leq)$ наричаме локалната структура на e-степените.
- Структурата $\mathcal{G}_e$ е определима в стандартния модел на аритметиката.

Множеството на верните твърдения в $\mathcal{G}_e$

Теорема. *[Купър 1984] $\mathcal{G}_e$ е гъста частична наредба с най-голям елемент $\mathbf{0}'_e$ и най-малък елемент $\mathbf{0}_e$.*

Теорема. *[Бианкини] Всяка изброима частична наредба може да се вложи между всеки два различни елемента $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$.*

Следствие. *Множеството от твърденията от вида $\exists x \varphi$, които са верни в $\mathcal{G}_e$ е разрешимо.*

Пример:
$\exists x_1, \dots \exists x_n (x_1 \leq x_2 \;\&\; x_2 = x_4 \;\&\; x_2 \not\leq x_3 \dots) \vee (x_1 = x_2 \dots) \dots)$.
I случай: формулата се преобразува до логически абсурд: $\exists x_i (x_i \neq x_i)$. Отговор: НЕ
II случай: формулата се преобразува до описание на крайна частична наредба. Отговор: ДА.

Множеството на верните твърдения в $\mathcal{G}_e$

Теорема. *[Купър 1984] $\mathcal{G}_e$ е гъста частична наредба с най-голям елемент $\mathbf{0}'_e$ и най-малък елемент $\mathbf{0}_e$.*

Теорема. *[Бианкини] Всяка изброима частична наредба може да се вложи между всеки два различни елемента $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$.*

Следствие. *Множеството от твърденията от вида $\exists x \varphi$, които са верни в $\mathcal{G}_e$ е разрешимо.*

Пример:

$\exists x_1, \dots \exists x_n (x_1 \leq x_2 \,\&\, x_2 = x_4 \,\&\, x_2 \not\leq x_3 \dots) \vee (x_1 = x_2 \dots) \dots)$.

I случай: формулата се преобразува до логически абсурд: $\exists x_i (x_i \neq x_i)$. Отговор: НЕ

II случай: формулата се преобразува до описание на крайна частична наредба. Отговор: ДА.

Множеството на верните твърдения в $\mathcal{G}_e$

Теорема. *[Купър 1984] $\mathcal{G}_e$ е гъста частична наредба с най-голям елемент $\mathbf{0}'_e$ и най-малък елемент $\mathbf{0}_e$.*

Теорема. *[Бианкини] Всяка изброима частична наредба може да се вложи между всеки два различни елемента $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$.*

Следствие. *Множеството от твърденията от вида $\exists x \varphi$, които са верни в $\mathcal{G}_e$ е разрешимо.*

Пример:
$\exists x_1, \dots \exists x_n (x_1 \leq x_2 \ \& \ x_2 = x_4 \ \& \ x_2 \not\leq x_3 \dots) \vee (x_1 = x_2 \dots) \dots)$.
I случай: формулата се преобразува до логически абсурд: $\exists x_i (x_i \neq x_i)$. Отговор: НЕ
II случай: формулата се преобразува до описание на крайна частична наредба. Отговор: ДА.

Множеството на верните твърдения в $\mathcal{G}_e$

Теорема. *[Купър 1984] $\mathcal{G}_e$ е гъста частична наредба с най-голям елемент $\mathbf{0}'_e$ и най-малък елемент $\mathbf{0}_e$.*

Теорема. *[Бианкини] Всяка изброима частична наредба може да се вложи между всеки два различни елемента $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$.*

Следствие. *Множеството от твърденията от вида $\exists x\varphi$, които са верни в $\mathcal{G}_e$ е разрешимо.*

Пример:

$\exists x_1, \ldots \exists x_n (x_1 \leq x_2 \ \& \ x_2 = x_4 \ \& \ x_2 \not\leq x_3 \ldots) \vee (x_1 = x_2 \ldots) \ldots)$.

I случай: формулата се преобразува до логически абсурд: $\exists x_i (x_i \neq x_i)$. Отговор: НЕ

II случай: формулата се преобразува до описание на крайна частична наредба. Отговор: ДА.

Множеството на верните твърдения в $\mathcal{G}_e$

Теорема. *[Купър 1984] $\mathcal{G}_e$ е гъста частична наредба с най-голям елемент $\mathbf{0}'_e$ и най-малък елемент $\mathbf{0}_e$.*

Теорема. *[Бианкини] Всяка изброима частична наредба може да се вложи между всеки два различни елемента $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$.*

Следствие. *Множеството от твърденията от вида $\exists x \varphi$, които са верни в $\mathcal{G}_e$ е разрешимо.*

Пример:

$\exists x_1, \dots \exists x_n (x_1 \leq x_2 \ \& \ x_2 = x_4 \ \& \ x_2 \not\leq x_3 \dots) \vee (x_1 = x_2 \dots) \dots)$.

I случай: формулата се преобразува до логически абсурд: $\exists x_i (x_i \neq x_i)$. Отговор: НЕ

II случай: формулата се преобразува до описание на крайна частична наредба. Отговор: ДА.

Множеството на верните твърдения в $\mathcal{G}_e$

Теорема. *[Купър 1984] $\mathcal{G}_e$ е гъста частична наредба с най-голям елемент $\mathbf{0}'_e$ и най-малък елемент $\mathbf{0}_e$.*

Теорема. *[Бианкини] Всяка изброима частична наредба може да се вложи между всеки два различни елемента $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$.*

Следствие. *Множеството от твърденията от вида $\exists x \varphi$, които са верни в $\mathcal{G}_e$ е разрешимо.*

Пример:

$\exists x_1, \dots \exists x_n (x_1 \leq x_2 \ \& \ x_2 = x_4 \ \& \ x_2 \not\leq x_3 \dots) \vee (x_1 = x_2 \dots) \dots)$.

I случай: формулата се преобразува до логически абсурд: $\exists x_i (x_i \neq x_i)$. Отговор: НЕ

II случай: формулата се преобразува до описание на крайна частична наредба. Отговор: ДА.

По-сложни твърдения

- $\mathcal{G}_e$ е горна полу-решетка. Всеки два елемента $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$ имат точна горна граница $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$.
- $\mathbf{c} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ е по-сложно твърдение: $\mathbf{a} \leq \mathbf{c} \ \& \ \mathbf{b} \leq \mathbf{c} \ \& \ \forall \mathbf{x}(\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \ \& \ \mathbf{b} \leq \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c} \leq \mathbf{x})$.

Теорема. *[Купър, Сорби, Юи 1996] Съществува ненулева степен, която не може да се допълни до $\mathbf{0}_e'$.*

Твърдението $\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{b}(\mathbf{a} < \mathbf{0}_e' \ \& \ (\mathbf{0}_e < \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0}_e')$ е грешно.

Теорема. *[С. 2009] Съществува степен строго по-малка от $\mathbf{0}_e'$ над която няма разделяне на $\mathbf{0}_e'$.*

Твърдението $\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y}(\mathbf{a} < \mathbf{0}_e' \ \& \ (\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}_e' \rightarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}_e' \vee \mathbf{a} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}_e'))$ е вярно.

По-сложни твърдения

- $\mathcal{G}_e$ е горна полу-решетка. Всеки два елемента $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$ имат точна горна граница $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$.
- $\mathbf{c} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ е по-сложно твърдение:
  $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}\ \&\ \mathbf{b} \leq \mathbf{c}\ \&\ \forall \mathbf{x}(\mathbf{a} \leq \mathbf{x}\ \&\ \mathbf{b} \leq \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c} \leq \mathbf{x})$.

Теорема. *[Купър, Сорби, Юи 1996] Съществува ненулева степен, която не може да се допълни до $\mathbf{0}'_e$.*

Твърдението $\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{b}(\mathbf{a} < \mathbf{0}'_e\ \&\ (\mathbf{0}_e < \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0}'_e)$ е грешно.

Теорема. *[С. 2009] Съществува степен строго по-малка от $\mathbf{0}'_e$ над която няма разделяне на $\mathbf{0}'_e$.*

Твърдението
$\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y}(\mathbf{a} < \mathbf{0}'_e\ \&\ (\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}'_e \rightarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}'_e \vee \mathbf{a} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}'_e))$ е вярно.

По-сложни твърдения

- $\mathcal{G}_e$ е горна полу-решетка. Всеки два елемента $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$ имат точна горна граница $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$.
- $\mathbf{c} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ е по-сложно твърдение: $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$ & $\mathbf{b} \leq \mathbf{c}$ & $\forall \mathbf{x}(\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ & $\mathbf{b} \leq \mathbf{x} \to \mathbf{c} \leq \mathbf{x})$.

Теорема. *[Купър, Сорби, Юи 1996] Съществува ненулева степен, която не може да се допълни до* $\mathbf{0}'_e$.

Твърдението $\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{b}(\mathbf{a} < \mathbf{0}'_e$ & $(\mathbf{0}_e < \mathbf{b} \to \mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0}'_e)$ е грешно.

Теорема. *[С. 2009] Съществува степен строго по-малка от* $\mathbf{0}'_e$ *над която няма разделяне на* $\mathbf{0}'_e$.

Твърдението $\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y}(\mathbf{a} < \mathbf{0}'_e$ & $(\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}'_e \to \mathbf{a} \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}'_e \vee \mathbf{a} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}'_e))$ е вярно.

По-сложни твърдения

- $\mathcal{G}_e$ е горна полу-решетка. Всеки два елемента $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$ имат точна горна граница $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$.
- $\mathbf{c} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ е по-сложно твърдение:
  $\mathbf{a} \leq \mathbf{c} \ \& \ \mathbf{b} \leq \mathbf{c} \ \& \ \forall \mathbf{x}(\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \ \& \ \mathbf{b} \leq \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c} \leq \mathbf{x})$.

Теорема. *[Купър, Сорби, Юи 1996] Съществува ненулева степен, която не може да се допълни до $\mathbf{0}_e'$.*

Твърдението $\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{b}(\mathbf{a} < \mathbf{0}_e' \ \& \ (\mathbf{0}_e < \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0}_e')$ е грешно.

Теорема. *[С. 2009] Съществува степен строго по-малка от $\mathbf{0}_e'$ над която няма разделяне на $\mathbf{0}_e'$.*

Твърдението $\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y}(\mathbf{a} < \mathbf{0}_e' \ \& \ (\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}_e' \rightarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}_e' \vee \mathbf{a} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}_e'))$ е вярно.

По-сложни твърдения

- $\mathcal{G}_e$ е горна полу-решетка. Всеки два елемента $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$ имат точна горна граница $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$.
- $\mathbf{c} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ е по-сложно твърдение:
  $\mathbf{a} \leq \mathbf{c} \;\&\; \mathbf{b} \leq \mathbf{c} \;\&\; \forall \mathbf{x}(\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \;\&\; \mathbf{b} \leq \mathbf{x} \to \mathbf{c} \leq \mathbf{x})$.

Теорема. *[Купър, Сорби, Юи 1996] Съществува ненулева степен, която не може да се допълни до $\mathbf{0}'_e$.*

Твърдението $\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{b}(\mathbf{a} < \mathbf{0}'_e \;\&\; (\mathbf{0}_e < \mathbf{b} \to \mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0}'_e)$ е грешно.

Теорема. *[С. 2009] Съществува степен строго по-малка от $\mathbf{0}'_e$ над която няма разделяне на $\mathbf{0}'_e$.*

Твърдението $\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y}(\mathbf{a} < \mathbf{0}'_e \;\&\; (\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}'_e \to \mathbf{a} \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}'_e \vee \mathbf{a} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}'_e))$ е вярно.

По-сложни твърдения

- $\mathcal{G}_e$ е горна полу-решетка. Всеки два елемента $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ в $\mathcal{G}_e$ имат точна горна граница $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$.
- $\mathbf{c} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ е по-сложно твърдение:
  $\mathbf{a} \leq \mathbf{c} \ \& \ \mathbf{b} \leq \mathbf{c} \ \& \ \forall \mathbf{x}(\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \ \& \ \mathbf{b} \leq \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c} \leq \mathbf{x})$.

Теорема. *[Купър, Сорби, Юи 1996] Съществува ненулева степен, която не може да се допълни до* $\mathbf{0}_e'$.

Твърдението $\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{b}(\mathbf{a} < \mathbf{0}_e' \ \& \ (\mathbf{0}_e < \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{0}_e')$ е грешно.

Теорема. *[С. 2009] Съществува степен строго по-малка от* $\mathbf{0}_e'$ *над която няма разделяне на* $\mathbf{0}_e'$.

Твърдението
$\exists \mathbf{a} \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y}(\mathbf{a} < \mathbf{0}_e' \ \& \ (\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}_e' \rightarrow \mathbf{a} \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}_e' \vee \mathbf{a} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}_e'))$ е вярно.

Неразрешимост

Теорема. *[Слеман, Удин 1997] Множеството на верните твърдения в $\mathcal{G}_e$ е неразрешимо.*

Теорема. *[Ганчев, С. 2012] Стандартният модел на аритметиката е определим в локалната структура на номерационните степени.*

Следствие. *Структурата $\mathcal{G}_e$ е силно неразрешима. Следователно, теорията на гъсти частични наредби с най-голям и най-малък елемент е неразрешима, теорията на горните полу-решетки е неразрешима.*

Неразрешимост

Теорема. *[Слеман, Удин 1997] Множеството на верните твърдения в $\mathcal{G}_e$ е неразрешимо.*

Теорема. *[Ганчев, С. 2012] Стандартният модел на аритметиката е определим в локалната структура на номерационните степени.*

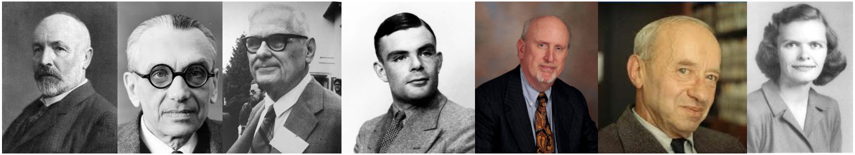
Следствие. *Структурата $\mathcal{G}_e$ е силно неразрешима. Следователно, теорията на гъсти частични наредби с най-голям и най-малък елемент е неразрешима, теорията на горните полу-решетки е неразрешима.*

Неразрешимост

Теорема. *[Слеман, Удин 1997] Множеството на верните твърдения в $\mathcal{G}_e$ е неразрешимо.*

Теорема. *[Ганчев, С. 2012] Стандартният модел на аритметиката е определим в локалната структура на номерационните степени.*

Следствие. *Структурата $\mathcal{G}_e$ е силно неразрешима. Следователно, теорията на гъсти частични наредби с най-голям и най-малък елемент е неразрешима, теорията на горните полу-решетки е неразрешима.*



Благодаря за вниманието!