Определимост на непрекъснатите степени

Мария И. Соскова
(съвместна работа с Ури Андрюс, Грег Игуса и Джо Милър)

Логически семинар на ФМИ
Януари, 2018

Пролог

- *Непрекъснатите степени* измерват алгоритмичната сложност на елементи на изчислими метрични пространства.

- Тюринговите степени могат да се вложат в непрекъснатите, а непрекъснатите могат да се вложат в номерционните степени.

- Днес ще разгледаме няколко характеризации на непрекъснатите степени като подструктура на номерационните степени.

- Основната ни характеризация се базира на едно сравнително просто структурно свойство.

- Така ще изведем определимостта на непрекъснатите степени в частичната наредба на номерционните степени.

Номерационните степени

A е *номерационно сводимо* към B, ако всяка номерация на B може да изчисли номерация на A.

Тук номерация на B е функция $f \in \omega^\omega$ с $\mathrm{range}(f) = B$. Дефиницията изисква да има функция $g \in \omega^\omega$ с $\mathrm{range}(g) = A$ така, че $g \leqslant_T f$.

Теоремата на Селман доказва, че бихме могли да изискваме равномерна изчислимост на g от f без да променим дефиницията.

Дефиниция

$A \subseteq \omega$ е *номерацоинно сводимо* към $B \subseteq \omega$ ($A \leqslant_e B$), ако съществува рекурсивно номеруемо (р. н.) множество Δ така, че:

$$x \in A \iff (\exists v)(\langle x, v\rangle \in \Delta \ \&\ D_v \subseteq B).$$

Структурата от степени $\mathcal{D}_e$ е структурата на *номерационните степени*. Тя е горна полу-решетка с най-малък елемент (степента състояща се от всички полуразрешими множества).

Тоталните степени

Твърдение

$A \leqslant_T B \iff A \oplus \overline{A}$ е р.н. релативно $B \iff A \oplus \overline{A} \leqslant_e B \oplus \overline{B}$.

Влагането $\iota \colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_e$, където $\iota(d_T(A)) = d_e(A \oplus \overline{A})$, запазва наредбата и точната горна граница.

Тоталните степени са образа на Тюринговите при това влагане.

Да разгледаме множеството от номерации на множество от вида $A \oplus \overline{A}$. То има елемент с най-ниска Тюрингова степен $d_T(A)$.

От друга страна, ако множеството от номерации на множество X има елемент от най-ниска Тюрингова степен $d_T(A)$, то $X \equiv_e A \oplus \overline{A}$.

Съществуват нетотални степени: например генеричните множества имат нетотална степен.

Простото структурно свойство

Дефиниция

Номерационна степен $\mathbf{a}$ наричаме *почти тотална*, ако всеки път, когато $\mathbf{b} \nleqslant \mathbf{a}$ е тотална степен, $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ също е тотална степен.

Забележка! Тоталните степени са почти тотални.

Съществуват ли нетотални почти тотални степени?

Твърдение (Кай, Лемп, Милър, С. 2014 (непубликувано))

Непрекъснатите номерационни степени са почти тотални.

Съществуват нетотални непрекъснати степени, следователно съществуват нетотални почти тотални степени. Трябват ни няколко дефиниции от изчислимия анализ.

Изчислимост в анализа: реалните числа

Дефиниция

$\lambda\colon \mathcal{Q}^+ \to \mathcal{Q}$ наричаме *име* на реално число $x \in \mathbb{R}$, ако за всяко рационално $\varepsilon > 0$ е в сила $|\lambda(\varepsilon) - x| < \varepsilon$.

Имената могат да бъдат кодирани като редици от нули и единици (множества от естествени числа) и това ни позволява да въведем понятия от изчислимостта за реалните числа. Например:

Дефиниция

Функцията $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е *изчислима*, ако има Тюрингов оператор, който съпоставя на име на реалното число $x \in \mathcal{R}$, име на $f(x)$.

- Двоичното представяне на реалното число x може да бъде изчислено от всяко име на x. (неравномерно).
- Двоичното представяне на x може да изчисли име на x.
- Така всяко реално число има име от най-ниска Тюрингова степен, която наричаме *Тюрингова степен* на x.

Изчислими метрични пространства

Дефиниция

Изчислимо метрично пространство наричаме метрично пространство $\mathcal{M}$, заедно с изброима гъста редица $Q^{\mathcal{M}} = \{q_n^{\mathcal{M}}\}_{n\in\omega}$, върху която метриката (като функция $\omega^2 \to \mathbb{R}$) е изчислима.

Примери:

- $\mathbb{R}$ с $Q^{\mathbb{R}} = \mathbb{Q}$.
- *Хилбертовия куб* $[0,1]^\omega$ с метрика
$$d(\alpha,\beta) = \sum_{n\in\omega} |\alpha(n) - \beta(n)|/2^n$$
и $Q^{[0,1]^\omega}$ редиците от рационални числа $[0,1]$, измежду които краен брой са ненулеви.
- 2^ω, ω^ω, $C[0,1]$.

Дефиниция

Име на елемент $x \in \mathcal{M}$ е функция $\lambda : \mathbb{Q}^+ \to \omega$ такава, че за всяко рационално число $\varepsilon > 0$ е в сила $d_{\mathcal{M}}(x, q^{\mathcal{M}}_{\lambda(\varepsilon)}) < \varepsilon$.

Непрекъснати степени

Видяхме, че реалните числа $x \in \mathbb{R}$ винаги имат име от най-ниска Тюрингова степен (степента на двоичното им представяне).

Въпрос (Поур-Ел, Лемп)

Ако вземем елемент x от произволно изчислимо пространство, дали x има име от най-ниска Тюрингова степен?

Дефиниция (Милър 2004)

Нека x и y са точки в изчислими метрични пространства. Казваме, че $x \leqslant_r y$ ако има равномерен начин да изчислим име на x от всяко име на y.

Въз основа на тази сводимост получаваме *непрекъснатите степени*.

Непрекъснатите степени и други структури

Тюринговите степени могат да бъдат вложени в непрекъснатите: те отговарят на непрекъснатите степени на елементите на $\mathbb{R}$ (или 2^ω, или $[0,1]$).

Твърдение

Всяка непрекъсната степен съдържа елемент на $C[0,1]$ и елемент на $[0,1]^\omega$.

Нека $\alpha \in [0,1]^\omega$. Дефинираме множеството

$$C_\alpha = \bigoplus_{i \in \omega} \{q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha(i)\} \oplus \{q \in \mathbb{Q} \mid q > \alpha(i)\}.$$

Изчисляването на номерация на C_α е точно толкова трудно, колкото изчисляването на име на α. Така функцията, която съпоставя $\alpha \mapsto C_\alpha$ задава влагане на непрекъснатите степени в номерационните.

Въпрос (Поур Ел, Лемп)

Има ли *непрекъсната номерационна степен*, която не е тотална?

Нетотални непрекъснати степени

Ако α няма рационални елементи, то $C_\alpha = \bigoplus_{i\in\omega} \{q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha(i)\} \oplus \{q \in \mathbb{Q} \mid q > \alpha(i)\}$ е тотално множество.

Теорема (Милър 2004)

Има нетотални непрекъснати степени.

Известни са три различни доказателства. Всички са топологични по характер.

- Милър използва обобщение на теоремата на Брауър за неподвижаната точка.
- Дей и Милър 2013 доказват, че неутралните мерки на Левин имат нетотална непрекъсната степен. Левин използва лемата на Шпернер, за да построи неутрална мярка.
- Кихара и Поли и независимо Хойръп дават доказателство, като използват факта, че $[0,1]^\omega$ не може да се представи като изброимо обединение на 0-мерни подпространства.

Непрекъснатите степени са почти тотални

Номерационна степен $\mathbf{a}$ е *почти тотална*, ако всеки път, когато $\mathbf{b} \nleqslant \mathbf{a}$ е тотална, $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ също е тотална.

Твърдение (Кай, Лемп, Милър, С. 2014 (непубликувано))

Непрекъснатите номерационни степени са почти тотални.

Доказателство: Нека $\alpha \in [0,1]^\omega$ и нека $x \in [0,1]$ е такова, че $x \nleqslant_r \alpha$. Дефинираме

$$\beta \in [0,1]^\omega \text{ като } \beta(n) = (\alpha(n) + x)/2.$$

- Никой елемент на β не може да е рационално число, и така β има тотална степен.
- $\alpha \oplus x \equiv_r \beta \oplus x$, следователно също има тотална степен. $\square$

Обобщение

Какво научихме досега?

- Всяка непрекъсната степен е почти тотална.
- Има нетотални непрекъснати степени, следователно има нетотални почти тотални степени.
- Това е единственият начин, по който можем да построим нетотални почти тотални степени. Не ни е известна директна конструкция.

Това навежда на мисълта, че почти тоталните степени могат да се окажат точно непрекъснатите. В началото всички мислехме, че това е търде хубаво, за да е истина.

Кодируемост

Дефиниция

$U \subseteq 2^\omega$ е $\Sigma^0_1\langle A\rangle$ *клас*, ако има множество от крайни части $W \leqslant_e A$ така, че

$$U = [W]^{\prec} = \{X \in 2^\omega \mid (\exists \sigma \in W)\ X \succeq \sigma\}\,.$$

$\Pi^0_1\langle A\rangle$ *клас* е допълнението на някой $\Sigma^0_1\langle A\rangle$ клас.

Забележете, че всеки $\Pi^0_1\langle A \oplus \overline{A}\rangle$ клас е просто $\Pi^0_1(A)$ клас в обикновения смисъл.

Дефиниция (АИМС)

$A \subseteq \omega$ е *(равномерно) кодируемо*, ако съществува непразен $\Pi^0_1\langle A\rangle$ клас P така, че всеки елемент $X \in P$ (равномерно) номерира A.

- Равномерният вариант на кодируемост е еквивалентен на неравномерния.

Почти тоталните степени не би трябвало да съществуват

Цел: За дадено множество $A \subseteq \omega$, да построим генерично множество $X \in 2^\omega$ така, че $X \oplus \overline{X}$ е свидетел, че A не е почти тотално.

Строим X като $\bigcup_s \sigma_s$, така, че за всяко e:

$$\mathcal{R}_e : \Gamma_e(A) \neq X \oplus \overline{X}.$$

$$\mathcal{P}_e : \Delta_e(A \oplus X \oplus \overline{X}) \text{ не е номерация на } A.$$

Нека допуснем, че сме построили σ_s.
Винаги можем да удовлетворим $\mathcal{R}_e$: Ако $2|\sigma_s| \in \Gamma_e(A)$ то $\sigma_{s+1} = \sigma\hat{\ }0$, иначе $\sigma_{s+1} = \sigma_s\hat{\ }1$.

За да удовлетворим $\mathcal{P}_e$ трябва да намерим $\sigma_{s+1} \geq \sigma$, която форсира, че $\Delta_e(A \oplus X \oplus \overline{X})$:

1. е многозначна функция.
2. е с област от стойности извън A.
3. не е тотална функция
4. не номерира цялото множество A.

Неуспешно форсинг доказателство

Твърдение (АИМС)

Нека A е почти тотално множество. Съществува номерационен оператор Δ така, че ако X е достатъчно генерично, то $\Delta(A \oplus X \oplus \overline{X})$ е графика на тотална номерация на A.

- Нека $P \subseteq 2^\omega$ е множеството от всички B такива, че $A \subseteq B$ и не съществува $X \in 2^\omega$ така, че $\Delta(B \oplus X \oplus \overline{X})$ е многозначна функция.
- P е $\Pi^0_1\langle A\rangle$ клас. P е непразен, защото $A \in P$.
- Ако $B \in P$, то A е множеството от всички естествени числа в областта от стойности на $\Delta(B \oplus \sigma \oplus \overline{\sigma})$, където $\sigma \in 2^{<\omega}$.

Заключение (АИМС)

Всяка почти тотална степен е кодируема.

Да се възползваме от равномерна кодируемост

Нека A е равномерно кодируемо множество и нека P е съответният $\Pi^0_1\langle A\rangle$ клас и W е рекурсивно номеруемият оператор от дефиницията на равномерна кодируемост.

- Ако $z \in A$, то от теоремата за компактност следва, че има крайно множество $C \subseteq 2^{<\omega}$ такова, че $P \subseteq [C]^{\prec}$ и за всеки елемент $X \in [C]^{\preceq}$ е в сила $z \in W^X$.
- Ако $z \notin A$ и $C \subseteq 2^{<\omega}$ е такова множество, то $P \cap [C]^{\prec} = \varnothing$.
- От комапктност следва, че и двата факта са $\Sigma^0_1\langle A\rangle$.
- Ще си мислим за крайни множества $C \subseteq 2^{<\omega}$ такива, че $(\forall X \in [C]^{\prec})\ z \in W^X$ като потенциални свидетели, че $z \in A$.
- Ако $z \in A$, то *поне един* свидетел ще бъде потвърден. Ако $z \notin A$, то *всички* свидетели са опровергани.
- Итерирайки тази идея получаваме понятието *холистично множество*.

Холистични множества

Дефиниция

$S \subseteq \omega^{<\omega}$ е *холистично*, ако за всяка $\sigma \in \omega^{<\omega}$,

1. $(\forall n)\ \sigma^\frown(2n)\ \sigma^\frown(2n+1)$ не са едновременно в S,
2. Ако $\sigma \in S$, то $(\exists n)\ \sigma^\frown(2n+1) \in S$.
3. Ако $\sigma \notin S$, то $(\forall n)\ \sigma^\frown(2n) \in S$,

Можем да си мислим за n като индекс на потенциален свидетел, че $\sigma \in S$.

- Или поне един свидетел е потвърден: $(\exists n)\ \sigma^\frown(2n+1) \in S$,
- Или всички свидетели са опровергани: $(\forall n)\ \sigma^\frown(2n) \in S$.

Заключение (АИМС)

Ако $A \subseteq \omega$ е равномерно кодируемо, то съществува холистично множество $S \equiv_e A$.

Холистично пространство

Дефиниция

Нека $\mathcal{H} = \{S \subseteq \omega^{<\omega} \colon S$ е холистично$\}$. Предбаза за топология над $\mathcal{H}$ можем да получим като дефинираме околности $O_\sigma = \{S \in \mathcal{H} \colon \sigma \in S\}$ за всяка редица $\sigma \in \omega^{<\omega}$. Така полученото топологично пространство наричаме *холистично пространство*.

Твърдение (АИМС)

$\mathcal{H}$ е Хаусдорфово, регулярно и има изброима база.

Така, $\mathcal{H}$ удовлетворява условията на теоремата за метризация на Урисон (1925–1926):

Твърдение (АИМС)

$\mathcal{H}$ е метризуемо пространство.

Ефективна теорема на Урисон

Теорема (Шрьодер 1998)

Нека $\mathcal{X}$ е изчислимо топологично пространство. Ако $\mathcal{X}$ е Хаусдорфово и ефективно регулярно, то $\mathcal{X}$ допуска изчислима метрика, която генерира първоначалната топология.

Лема (АИМС)

$\mathcal{H}$ удовлетворява хипотезата на теоремата на Шрьодер и следоватлено допуска изчислима метрика d.

Тази метрика е изчислима по подходящ начин: ако $S, T \in \mathcal{H}$, то от номерации на S и T можем да изчислим име на $d(S, T)$.

Последната стъпка

Не е трудно да построим ефективна гъста редица от изчислими множества в $\mathcal{H}$. И така:

Лема (АИМС)

$(\mathcal{H}, d)$ е изчислимо метрично пространство.

Лема (АИМС)

Ако $S \in \mathcal{H}$, то непрекъсната степен на S като точка в $(\mathcal{H}, d)$ съвпада с номерационната степен на S.

Основната теорема

Всичко казано досега доказва:

Теорема (АИМС)

Нека **a** е номерационна степен. Следните условия са еквивалентни:

1. **a** е почти тотална,
2. множествата в **a** са (равномерно) кодируеми,
3. **a** съдържа холистично множество,
4. **a** е непрекъсната.

Определимост в номерационните степени

Теорема (Кай, Ганчев, Лемп, Милър, С. (2016))

Множеството на тоталните степени и релацията “рекурсивно номеруемо относно” между тотални степени са определими в $\mathcal{D}_e$.

Corollary (АИМС)

Почти тоталните, а следователно и непрекъснатите степени са определими в номерцаионните степени.

Релацията “ПА над”

Дефиниция

Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са номерационни степени. Казваме, че $\mathbf{a}$ е ПА над $\mathbf{b}$ ако всеки непразен $\Pi^0_1\langle\mathbf{a}\rangle$ клас съдържа елемент, който е изчислим относно $\mathbf{b}$.

Теорема (Miller (2004))

Ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са тотални степени, то $\mathbf{a}$ е ПА над $\mathbf{b}$ тогава и само тогава, когато съществува нетотална непрекъсната степен $\mathbf{c} \in (\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

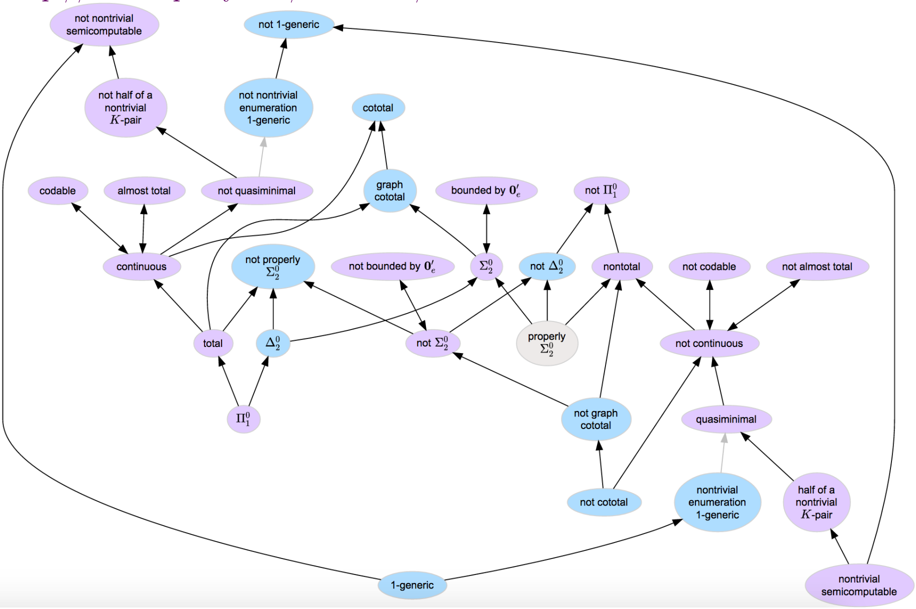
Corollary (АИМС)

Релацията “$\mathbf{a}$ е ПА над $\mathbf{b}$” за тотални степени е опеределима в номерационните степени.

Въпрос

Има ли нетривиален автоморфизъм на $\mathcal{D}_T$ който запазва релациите “рекурсивно номеруемо относно” и “ПА над”?

http://ludovicpatey.com/zooviewer/



Епилог

- Разгледахме няколко различни характеризации на непрекъснатите степени в номерационните степени.
- Основната, почти тоталност, е естествено структурно свойство.
- Не знаем как директно да построим нетотална почти тотална степен.
- Всички известни методи за построяване на нетотална непрекъсната степен включват нетривиален топологичен елемент.

Въпрос

Каква е причината структурно свойство на номерационните степени да отразява топологично явление?