ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2015, т. 289, с. 83–106

УДК 517.53

Проблема В.А. Стеклова об оценке роста ортогональных многочленов[1]

А. И. Аптекарев[2,3], С. А. Денисов[4], Д. Н. Туляков[2,5]

Поступило 15 января 2014 г.

Известная проблема В.А. Стеклова тесно связана со следующей экстремальной задачей. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ ищется $M_{n,\delta} = \sup_{\sigma\in S_\delta}\|\phi_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$, где $\phi_n(z)$ — ортонормированный многочлен по мере $\sigma \in S_\delta$, а S_δ — класс Стеклова вероятностных мер σ на единичной окружности таких, что $\sigma'(\theta) \ge \delta/(2\pi) > 0$ в каждой лебеговой точке σ. Имеется элементарная оценка $M_n \lesssim \sqrt{n}$. Е.А. Рахманов в 1981 г. доказал, что $M_n \gtrsim \sqrt{n}/(\ln n)^{3/2}$. Наш основной результат состоит в том, что $M_n \gtrsim \sqrt{n}$, т.е. элементарная оценка точна. В работе дается обзор результатов по решению этой экстремальной задачи и по общей проблеме Стеклова в теории ортогональных многочленов. Также в работе исследуется асимптотика некоторых тригонометрических многочленов, определяемых свертками Фейера. Эти многочлены могут использоваться при построении асимптотических решений рассматриваемой экстремальной задачи.

DOI: 10.1134/S0371968515020053

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория ортогональных многочленов занимала важное место в творчестве В.А. Стеклова. Всего им опубликовано 29 работ по этой тематике [11–39]. Первые работы этого цикла появились в 1900 г., а последние в 1926 г. В обзоре по ортогональным многочленам 1940 г. [9] все эти работы были рассмотрены с конкретными указаниями, какие новые свойства ортогональных многочленов в них получены. В отечественной литературе детальный анализ работ В.А. Стеклова был проведен в 1977 г. в монографическом обзоре П.К. Суетина [40]. Основное внимание в [40] было уделено гипотезе Стеклова, достоверность которой тогда еще не была выяснена, что привлекало к ней и связанным с ней задачам повышенный интерес. В первую очередь интерес вызывала задача об оценке ортогональных многочленов на носителе веса ортогональности, которая в [40] была названа *проблемой Стеклова*: найти оценку на $(-1,1)$ для полиномиальной последовательности $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$, которая ортонормирована

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,\rho(x)\,dx = \delta_{n,m}, \qquad n,m = 0,1,2,\dots, \tag{1.1}$$

со строго положительным весом ρ:

$$\rho(x) \ge \delta > 0, \qquad x \in [-1,1]. \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы №1 ОМН РАН (А.И.А., Д.Н.Т.), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00245, 13-01-12430-ОФИ-м (А.И.А., Д.Н.Т.)) и National Science Foundation (проект DMS-1067413 (С.А.Д.)).

[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия.

[3]E-mail: aptekaa@keldysh.ru

[4]Department of Mathematics, University of Wisconsin–Madison, Madison, WI, USA.
E-mail: denissov@math.wisc.edu

[5]E-mail: dntulyakov@gmail.com

© А.И. Аптекарев, С.А. Денисов, Д.Н. Туляков, 2015

В 1921 г. В.А. Стеклов высказал предположение, что последовательность $\{P_n(x)\}$ ограничена в точках $x \in (-1, 1)$, т.е.

$$\limsup_{n\to\infty} |P_n(x)| < \infty, \tag{1.3}$$

если вес ρ не обращается в нуль на $[-1, 1]$ (см. [35, с. 321] или цитату в [40]). В настоящей работе мы отметим достигнутый после 1977 г. прогресс в связи с гипотезой и проблемой Стеклова.

Мы будем использовать более удобную терминологию многочленов, ортогональных на окружности. Пусть $\{\phi_n\}$ будет последовательностью многочленов от $z = e^{i\theta}$, ортонормированных на единичной окружности

$$\int_0^{2\pi} \phi_n \overline{\phi}_m \, d\sigma(\theta) = \delta_{n,m}, \qquad n, m = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.4}$$

по отношению к мере σ. *Классом Стеклова* S_δ называют класс вероятностных мер σ на единичной окружности, удовлетворяющих в каждой точке Лебега условию

$$\sigma' \geq \frac{\delta}{2\pi}. \tag{1.5}$$

В этих терминах гипотеза Стеклова утверждает, что многочлены ϕ_n, порождаемые мерой из класса Стеклова, должны быть на носителе меры ортогональности равномерно по n ограничены.

Гипотеза Стеклова была в 1979 г. опровергнута Е.А. Рахмановым [7]. Им были построены многочлены с условиями (1.4), (1.5) такие, что

$$\limsup_{n\to\infty} \|\phi_n(z;\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \infty. \tag{1.6}$$

Точнее, в конструкции Рахманова (ниже мы остановимся на ней подробнее) многочлены демонстрировали логарифмический рост (по подпоследовательности), а их мера ортогональности (из класса Стеклова) содержала дискретную компоненту. Контрпример Рахманова был распространен на непрерывные меры (веса́) в [2].

Важную роль в конструкции Рахманова и в последующих работах по проблеме Стеклова играла следующая экстремальная задача: для фиксированного n найти

$$M_{n,\delta} = \sup_{\sigma\in S_\delta} \|\phi_n(z;\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \tag{1.7}$$

Имеется следующая тривиальная оценка сверху (см. [41]):

$$M_{n,\delta} \leq \sqrt{\frac{n+1}{\delta}}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Действительно, (1.8) следует из нормированности в (1.4) и неравенства Коши–Буняковского:

$$1 \geq \frac{\delta}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\phi_n|^2 \, d\theta = \delta \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2 \geq \delta \frac{\|\phi_n(z;\sigma)\|^2_{L^\infty(\mathbb{T})}}{n+1}, \qquad \phi_n(z;\sigma) =: \sum_{j=0}^{n} c_j z^j.$$

В 1981 г. Рахманов доказал [8] неравенство

$$C\sqrt{\frac{n+1}{\delta \ln^3 n}} \leq M_{n,\delta}, \qquad C > 0, \quad \delta \ll 1, \tag{1.9}$$

что позволило ему существенно уточнить свой предыдущий результат (1.6) из [7]. А именно он доказал, что для любой последовательности $\{\beta_n\}\colon \beta_n \to 0$, существует $\sigma \in S_\delta$, $\delta \ll 1$, такая, что

$$\|\phi_{k_n}(z;\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} > \beta_{k_n}\sqrt{\frac{k_n}{\ln^3 k_n}} \tag{1.10}$$

для некоторой последовательности $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$. Эта оценка почти точна ввиду следующего результата Геронимуса [5, теорема 3.5] и его уточнения, принадлежащего Неваи [6]. Для $\sigma \in S_\delta$ имеем

$$\|\phi_n(z;\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \bar{o}(\sqrt{n}). \tag{1.11}$$

Таким образом, результат Рахманова оставил очень узкий промежуток, где могут быть заключены величина $M_{n,\delta}$ и скорость роста норм у подпоследовательностей ортонормальных многочленов.

Недавно нам удалось доказать, что известные оценки сверху (1.8) и (1.11) по порядку роста являются асимптотически точными. Основным результатом нашей работы [3] является

Теорема 1.1. *Пусть $\delta \in (0,1)$. Тогда*

1) *для достаточно больших $n > n_0 > 0$ существует константа $C(\delta) > 0$ такая, что*

$$M_{n,\delta} > C(\delta)\sqrt{n}; \tag{1.12}$$

2) *для любой последовательности $\{\beta_n\}\colon \beta_n \to 0$, существует абсолютно непрерывная вероятностная мера $\sigma^*\colon d\sigma^* = \sigma^{*\prime}\,d\theta$, $\sigma^* \in S_\delta$, такая, что*

$$\|\phi_{k_n}(z;\sigma^*)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} > \beta_{k_n}\sqrt{k_n}, \qquad \beta_{k_n}(\delta) > 0, \tag{1.13}$$

для некоторой последовательности $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$.

Обратим внимание, что в теореме δ не обязательно маленькое и оно может быть как угодно близко к единице. Конечно, за это приходится платить величиной константы в (1.12), которая в этом случае будет стремиться к нулю.

О структуре статьи. В разд. 2 мы приводим предварительные результаты, которые касаются экстремальных задач вида (1.7). Эти результаты позволят описать структуру экстремальной меры задачи (1.7), а также решить задачу (1.7) для режимов δ, маленьких по сравнению с $1/n$. Затем мы обсуждаем подходы к построению ортонормированных многочленов с большой нормой, а также конструкции таких многочленов (разд. 3). В заключение (разд. 4) для одной из таких конструкций (не использованной в [3]) мы приводим оценки многочлена, близкого к экстремальному, и его производных.

2. ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ МЕРА И МАЛЕНЬКИЕ δ

В этом разделе мы рассмотрим экстремальные задачи вида (1.7), но на других классах мер ортогональности. Речь пойдет о задаче в классе мер с производной, ограниченной снизу (параметром δ) и сверху (параметром Δ):

$$\sup_{\sigma\in S_\delta^\Delta}\|\phi_n(z;\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} =: M_{n,\delta}^\Delta, \tag{2.1}$$

где S_δ^Δ — класс вероятностных мер σ таких, что $\Delta \ge \sigma'(\theta) \ge \delta > 0$, и о задаче в классе ненормированных мер:

$$\sup_{\sigma'(\theta)\ge\delta>0}\|\phi_n(z;\sigma)\| =: \widetilde{M}_{n,\delta}. \tag{2.2}$$

2.1. Структура экстремальной меры. Мы начнем с характеризации экстремальных мер в (2.1) и (1.7).

Теорема 2.1. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *существует экстремальная мера* σ_δ^Δ *для экстремальной задачи* (2.1), *при этом плотность* $d\sigma_\delta^\Delta(\theta)/d\theta$ *принимает два значения* Δ *и* δ *и имеет не более* $2n$ *переключений*;
2) *существует экстремальная мера* σ_δ^* *для экстремальной задачи* (1.7), *которая имеет вид*

$$d\sigma_\delta^* = \delta\,d\theta + \sum_{k=1}^{n} m_k\,\delta(\theta-\theta_k). \tag{2.3}$$

Доказательство. Детальное доказательство теоремы приведено в [3]. Здесь на примере утверждения 1) теоремы 2.1 мы продемонстрируем основную идею доказательства.

Наши экстремальные задачи (1.7), (2.1) являются вариационными задачами для функционала $F(s_0,s_1,\dots,s_n)$, заданного на конечном числе моментов $\{s_0,s_1,\dots,s_n\}$ меры из класса S_δ или S_δ^Δ соответственно. Можно положить

$$F(s_0,s_1,\dots,s_n)=|\phi_n(1)|.$$

Функционал F является дифференцируемым по моментам. Множество S_δ есть слабое замыкание множеств S_δ^Δ:

$$S_\delta=\overline{\bigcup_{\Delta>\delta} S_\delta^\Delta}.$$

Таким образом, мы можем рассматривать экстремальные задачи (1.7), (2.1) как задачи оптимального управления (см. [1])

$$F(s_0,s_1,\dots,s_n)\to\sup \tag{2.4}$$

с ограничениями

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,d\sigma(\theta)=s_k,\qquad k=0,\dots,n,\quad \sigma\in S_\delta. \tag{2.5}$$

Так как F непрерывен и моменты непрерывны в слабой топологии, то

$$\sup_{S_\delta} F=\lim_{\Delta\to\infty}\sup_{S_\delta^\Delta} F.$$

В свою очередь, задача

$$F\to\sup,\qquad \int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,d\sigma(\theta)=s_k,\quad k=0,\dots,n,\quad \sigma\in S_\delta^\Delta, \tag{2.6}$$

всегда имеет решение, потому что рассматривается на компактном множестве

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos k\theta\,d\sigma(\theta)=\operatorname{Re}s_k, & k=0,\dots,n,\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin k\theta\,d\sigma(\theta)=\operatorname{Im}s_k, & k=1,\dots,n,\end{cases}\qquad \sigma\in S_\delta^\Delta,\quad s_0\le C.$$

Напишем лагранжиан для этого случая:

$$\lambda_0 F(s_0, s_1, \ldots, s_n) + \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda_{2k+1} \int_0^{2\pi} \cos k\theta \, d\sigma(\theta) - \operatorname{Re} s_k \right) + \\ + \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_{2k} \int_0^{2\pi} \sin k\theta \, d\sigma(\theta) - \operatorname{Im} s_k \right) + L(s_0 - C) = \\ = \lambda_0 F(s_0, s_1, \ldots, s_n) - \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{Re} s_k + \operatorname{Im} s_k) + L(s_0 - C) + \\ + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_{2k+1} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{2k} \sin k\theta \right) d\sigma(\theta).$$

Условие оптимального управления на $\sigma \in S_\delta^\Delta$ для вариационной задачи (2.6) дает

$$\sigma'(\theta) = \frac{\Delta + \delta}{2} + \frac{\Delta - \delta}{2} \operatorname{sign} \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_{2k+1} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{2k} \sin k\theta \right), \tag{2.7}$$

т.е. $\sigma'(\theta)$ принимает два значения Δ и δ и имеет не более чем $2n$ переключений (так как степень управляющего тригонометрического многочлена не превосходит n). $\square$

2.2. Точное решение экстремальной задачи без ограничения на массу меры. Теперь мы перейдем к экстремальной задаче (2.2).

Теорема 2.2. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *имеет место равенство*

$$\widetilde{M}_{n,\delta} = \sqrt{\frac{n+1}{\delta}}; \tag{2.8}$$

2) *максимизирующая последовательность* $\{\sigma_l\}$ *для экстремальной задачи* (2.2) *имеет вид*

$$d\sigma_l = \delta \, d\theta + \sum_{k=1}^{n} m_k^{(l)} \, \delta(\theta - \theta_k), \qquad \theta_k = \frac{k}{n+1} 2\pi, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.9}$$

и

$$\{m_k^{(l)}\}\colon \quad \lim_{l\to\infty} \min_k m_k^{(l)} = \infty. \tag{2.10}$$

Замечание. Подчеркнем, что в классе мер $S_{\delta,M}$, $M > 0$ (т.е. без ограничения на полную массу M), элементарная оценка сверху (1.8) точна и максимизирующая последовательность имеет вид (2.3).

Доказательство теоремы 2.2. Введем обозначение

$$\Pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - \varepsilon_k), \qquad \varepsilon_k := e^{i\theta_k}, \tag{2.11}$$

и пусть $\Phi_n(z) = z^n + \ldots$ — ортогональный на $\mathbb{T}$ многочлен со старшим коэффициентом 1:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_n(e^{i\theta}) e^{-i\nu\theta} \, d\sigma(\theta) = 0, \qquad \nu = 0, \ldots, n-1, \tag{2.12}$$

где мера ортогональности имеет вид

$$d\sigma_l = \delta\, d\theta + \sum_{k=1}^{n} m_k\, \delta(\theta - \theta_k).$$

Многочлен $\Phi_n(z)$ можно представить в виде

$$\Phi_n(z) = \Pi_n(z)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{z - \varepsilon_j}\right). \tag{2.13}$$

Заметим, что соотношения ортогональности эквивалентны следующим:

$$0 = \left\langle \Phi_n(z), \frac{\Pi_n(z)}{z - \varepsilon_k} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{\left(\frac{\Pi_n(z)}{z - \varepsilon_k}\right)}\, d\sigma(\theta) = 0, \qquad k = 1, \dots, n, \quad z = e^{i\theta}.$$

Используя (2.13) и

$$\frac{\overline{\Pi}_n(z)}{\overline{z} - \overline{\varepsilon}_k} = \frac{\Pi_n^*(z)}{z^{n-1}(1 - z\overline{\varepsilon}_k)},$$

продолжим для $k = 1, \dots, n$:

$$0 = \frac{\delta}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Pi_n(z)\, \Pi_n^*(z)\, d\theta}{z^{n-1}(1 - z\overline{\varepsilon}_k)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j \delta}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Pi_n(z)\, \Pi_n^*(z)\, d\theta}{z^{n-1}(z - \varepsilon_j)(1 - z\overline{\varepsilon}_k)} + m_k C_k |\Pi_k'(\varepsilon_k)|^2. \tag{2.14}$$

Теперь предположим, что справедливо (2.10). Это в силу (2.14) влечет за собой

$$\|\overrightarrow{C}\| \lesssim \frac{1}{\min_k m_k}, \qquad \overrightarrow{C} = (C_1, \dots, C_n). \tag{2.15}$$

Затем вычисляем норму

$$\|\Phi_n\|_\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{z - \varepsilon_j}\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{C_j}}{\overline{z} - \overline{\varepsilon}_j}\right)\Pi_n(z)\, \overline{\Pi_n(z)}\, d\sigma(z) =$$

$$= \|\Pi_n\|_{\delta\, d\theta}^2 + \sum_{j=1}^{n} C_j \int_0^{2\pi} (\dots)\, d\theta + \sum_{j=1}^{n} \overline{C_j}\int_0^{2\pi} (\dots)\, d\theta + \sum_{k=1}^{m} m_k |C_k|^2 |\Pi_n'(\varepsilon_k)|^2.$$

Отсюда с учетом (2.14), (2.15) имеем

$$\min_k m_k \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \|\Phi_n\|_\sigma^2 \to \|\Pi_n\|_{\delta\, d\theta}^2, \\ \Phi_n(1) \to \Pi_n(1). \end{cases}$$

Наконец, положим

$$\Pi_n(z) = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \sum_{j=0}^{n} z^j,$$

что дает нам

$$\|\Pi_n\|_{\delta\, d\theta}^2 = \delta(n+1), \qquad \Pi_n(1) = n + 1.$$

Таким образом,

$$\frac{\Phi_n(1)}{\|\Phi_n\|_\sigma} \to \sqrt{\frac{n+1}{\delta}}, \qquad \text{если} \quad \min_k m_k \to \infty.$$

Теорема доказана. □

Замечание. Эта теорема имеет такое следствие для нашей первоначальной задачи (1.7). Рассмотрим класс S_δ в режиме δ, маленьких по сравнению с $1/n$. Тогда, выбирая масштаб $\phi_n(z;\alpha\mu) = \alpha^{-1/2}\phi_n(z;\mu)$ для любого $\alpha > 0$, получаем

$$M_{n,\delta_n} = \sqrt{\frac{n+1}{\delta_n}}(1+\overline{o}(1)),$$

где

$$\delta_n = \frac{C}{nm_n}, \qquad m_n \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, в режиме маленьких δ элементарная верхняя оценка (1.8) для $M_{n,\delta}$ точна. Если взять $m_n = 1/n$ и в приведенном доказательстве сделать полную массу конечной, то построенные выше многочлены ϕ_n будут ограничены по n при $\delta \sim 1$.

3. ДИЗАЙН ОРТОНОРМИРОВАННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С БОЛЬШОЙ НОРМОЙ

3.1. Многочлены, ортогональные на окружности: основные свойства. Для описания подходов и конструкций, связанных с экстремальной задачей (1.7), нам потребуются некоторые понятия из теории многочленов, ортогональных на окружности (см. [5, 10]).

Для произвольного многочлена $P_n(z) = p_n z^n + \ldots + p_1 z + p_0$ его n-й обратный (или преобразование $*$) определяется как

$$P_n^*(z) = z^n \overline{P_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{p}_0 z^n + \overline{p}_1 z^{n-1} + \ldots + \overline{p}_n.$$

Заметим, что если $z^* \neq 0$ является корнем $P_n(z)$, то $(\overline{z^*})^{-1}$ будет корнем $P_n^*(z)$. Также отметим, что определение n-го обратного многочлена допускает обращение старших коэффициентов $P_n(z)$ в нуль — в этом случае многочлен $P_n^*(z)$ имеет нуль (соответствующего порядка) в точке нуль. Хорошо известно [5], что все нули ϕ_n располагаются внутри $\mathbb{D}$; таким образом, ϕ_n^* не имеет нулей в $\overline{\mathbb{D}}$.

Для ортогональных многочленов со старшим коэффициентом 1 используют обозначение Φ_n:

$$\Phi_n(z;\mu) = z^n + \ldots : \qquad \phi_n(z;\mu) = \frac{\Phi_n(z;\mu)}{\|\Phi_n\|_{2,\mu}}.$$

С их помощью можно определить круговые параметры γ_n так, что

$$\Phi_n(0;\mu) = -\overline{\gamma}_{n-1}.$$

Тогда (см. [10])

$$\Phi_n(z;\mu) = \phi_n(z;\mu)\big(\rho_0 \ldots \rho_{n-1}\big), \qquad \rho_n = \sqrt{1-|\gamma_n|^2}.$$

Круговые параметры позволяют записать рекуррентные соотношения для ортонормальных относительно вероятностной меры многочленов и их n-х обратных (см. [5]):

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = \rho_n^{-1}(z\phi_n - \overline{\gamma}_n \phi_n^*), & \phi_0 = \sqrt{\dfrac{1}{|\mu|}} = 1, \\[2ex] \phi_{n+1}^* = \rho_n^{-1}(\phi_n^* - \gamma_n z \phi_n), & \phi_0^* = \sqrt{\dfrac{1}{|\mu|}} = 1. \end{cases}$$

Наряду с многочленами ϕ_n и ϕ_n^* нам потребуются многочлены второго рода ψ_n и соответственно ψ_n^*, которые определяются рекуррентными соотношениями того же вида, но с круговыми параметрами $-\gamma_n$, т.е. (см. [10, p. 57])

$$\begin{cases} \psi_{n+1} = \rho_n^{-1}(z\psi_n + \overline{\gamma}_n \psi_n^*), & \psi_0 = \sqrt{|\mu|} = 1, \\ \psi_{n+1}^* = \rho_n^{-1}(\psi_n^* + \gamma_n z \psi_n), & \psi_0^* = \sqrt{|\mu|} = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Важную роль в теории ортогональных многочленов на окружности играют две аналитические в круге функции, граничные значения которых связаны с мерой ортогональности $d\mu$. Речь идет о функции Каратеодори

$$F\colon \quad \operatorname{Re} F(z) > 0, \quad z \in \mathbb{D}, \qquad F(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} C(z, e^{i\theta})\, d\mu(\theta), \quad C(z,\xi) = \frac{\xi + z}{\xi - z}, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

и о функции Сегё

$$\Pi\colon \quad \Pi(z) \neq 0, \quad z \in \mathbb{D}, \qquad \Pi(z) = \exp\left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} C(z, e^{i\theta}) \log \mu'(e^{i\theta})\, d\theta \right).$$

Функция Сегё рассматривается при выполнении условия Сегё на абсолютно непрерывную часть меры ортогональности

$$\exp\left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln(2\pi\mu'(\theta))\, d\theta \right) = \rho > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \{\gamma_n\} \in \ell^2,$$

так как по теореме Сегё (см. [10]) выполнено $\rho = \prod_{j\ge 0} \rho_j$. Функция Каратеодори рассматривается без ограничений на меру, ее коэффициенты Тейлора равны моментам меры $d\mu$. Связь граничных значений с абсолютно непрерывной частью меры дается соотношениями

$$2\pi \operatorname{Re} F = \mu', \qquad |\Pi|^{-2} = 2\pi\mu' \quad \text{на} \ \ \mathbb{T}.$$

Ключевое место в теории ортогональных многочленов на окружности занимают приближения Бернштейна–Сегё для функции Каратеодори и меры ортогональности:

$$F_n(z) = \frac{\psi_n^*(z)}{\phi_n^*(z)} = \int\limits_{\mathbb{T}} C(z, e^{i\theta})\, d\mu_n(\theta), \qquad d\mu_n(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi|\phi_n(e^{i\theta})|^2} = \frac{d\theta}{2\pi|\phi_n^*(e^{i\theta})|^2}.$$

Первые n коэффициентов Тейлора у F_n и первые $2n$ моментов у $d\mu_n$ совпадают с соответствующими коэффициентами F и моментами меры $d\mu$. Наконец, отметим три замечательных предельных соотношения теории ортогональных многочленов на окружности

$$d\mu_n \to d\mu \qquad \text{и} \qquad F_n(z) \to F(z), \qquad \phi_n^*(z) \to \Pi(z), \qquad z \in \overline{\mathbb{D}},$$

где первое соотношение выполняется в смысле слабой сходимости мер, а второе и третье выполняются равномерно для $z \in \overline{\mathbb{D}}$ при дополнительных условиях на $d\mu$ (например, для μ из S_δ с гладкими μ').

3.2. Построение экстремальных многочленов: подход Рахманова. Рассмотрим ядро Кристоффеля–Дарбу

$$K_n(\xi, z, \mu) = \sum_{j=0}^{n} \overline{\phi_j(\xi;\mu)}\, \phi_j(z;\mu).$$

Следующий важный результат принадлежит Я. Геронимусу [5].

Лемма 3.1. *Рассмотрим меру $\mu(t) = (1-t)\mu + t\delta_0$, где $t \in (0,1)$. Тогда имеет место тождество*

$$\Phi_n(z;\mu(t)) = \Phi_n(z;\mu) - t\frac{\Phi_n(1;\mu)K_{n-1}(1,z,\mu)}{1-t+tK_{n-1}(1,1,\mu)}. \tag{3.2}$$

В работе [7] Рахманов использовал следующее обобщение, в котором точечные массы добавляются не в одной, а во многих специально выбранных точках.

Лемма 3.2. *Пусть μ — мера на окружности $\mathbb{T}$, $\Phi_n(z;\mu)$ — монические ортогональные полиномы, а $K_n(\xi,z,\mu) = \sum_{l=0}^{n} \overline{\phi_j(\xi;\mu)}\, \phi_j(z;\mu)$ — ядро Кристоффеля–Дарбу. Если точки $\xi_j \in \mathbb{T}$, $j = 1,\dots,m$, $m \le n$, выбраны так, что*

$$K_{n-1}(\xi_j, \xi_l, \mu) = 0, \qquad j \ne l, \tag{3.3}$$

то

$$\Phi_n(z;\eta) = \Phi_n(z;\mu) - \sum_{k=1}^{m} \frac{m_k\Phi_n(\xi_k;\mu)}{1+m_kK_{n-1}(\xi_k,\xi_k,\mu)} K_{n-1}(\xi_k, z_k, \mu), \tag{3.4}$$

где

$$\eta = \mu + \sum_{k=1}^{m} m_k\delta_{\theta_k}, \qquad z_k = e^{i\theta_k}, \qquad m_k \ge 0.$$

Использование этой формулы для $d\mu = d\theta$ сразу дает оценку

$$M_{n,\delta} \ge C(\delta)\ln n$$

при правильном выборе весов $\{m_j\}$. Кроме того, несложно показывается, что, меняя $\{m_k\}$, улучшить логарифмический рост невозможно. В случае же, когда мера $d\mu$ отлична от $d\theta$, вычисление полиномов, ядра Кристоффеля–Дарбу и его нулей представляется затруднительным.

В последующей работе [8] снова использовалась идея модификации веса точечной массой, но на этот раз мера ортогональности задавалась неявно.

3.3. Построение экстремальных многочленов: альтернативный подход. В работе [3] для оценки снизу решения экстремальной задачи (2.5), т.е. для построения (при фиксированном n) ортогонального в классе Стеклова $\sigma \in S_\delta$ многочлена $\phi_n^*(z;\sigma)$:

$$\phi_n^*(1;\sigma) > C(\delta)\sqrt{n}, \qquad \sigma \in S_\delta, \tag{3.5}$$

предложен принципиально иной подход.

Сначала условие Стеклова переписывается в виде нескольких соотношений, в которых фигурируют, вообще говоря, произвольные полином и функция Каратеодори. Затем все необходимые параметры предъявляются в явном виде, и бóльшая часть доказательства состоит в проверке того, что они удовлетворяют необходимым условиям. При этом значение модуля полинома ортогональности на окружности указывается явно и мера ортогональности легко находится из соответствующих формул. В частности, возможен ее доскональный анализ.

Переформулировка задачи (3.5) дается следующей леммой из [3].

Лемма 3.3. *Для доказательства* (3.5) *достаточно найти многочлен* ϕ_n^* *и функцию Каратеодори* $\widetilde{F}$, *обладающие следующими свойствами*:

1) $\phi_n^*(z)$ *не имеет корней в* $\mathbb{D}$;
2) *имеет место нормировка*

$$\int_{\mathbb{T}} |\phi_n^*(z)|^{-2}\, d\theta = 2\pi, \qquad \phi_n^*(0) > 0; \tag{3.6}$$

3) ϕ_n^* *имеет большую равномерную норму, т.е.*

$$|\phi_n^*(1)| \sim \sqrt{n};$$

4) $\widetilde{F} \in C^\infty(\mathbb{T})$, $\operatorname{Re}\widetilde{F} > 0$ *на* $\mathbb{T}$ *и*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re}\widetilde{F}(e^{i\theta})\, d\theta = 1; \tag{3.7}$$

5) *кроме того,*

$$|\phi_n^*(z)| + \bigl|\widetilde{F}(z)\bigl(\phi_n(z) - \phi_n^*(z)\bigr)\bigr| < C_1(\delta)\bigl(\operatorname{Re}\widetilde{F}(z)\bigr)^{1/2} \tag{3.8}$$

равномерно по $z \in \mathbb{T}$.

Доказательство. Детальное доказательство леммы см. в [3]; здесь мы приведем основную линию этого доказательства.

Известно (мы уже отмечали это в п. 3.3), что ортонормированные относительно вероятностной меры многочлены обладают свойствами 1) и 2) из леммы. Нетрудно показать (и мы делаем это в [3]), что верно и обратное, т.е. любой многочлен $\phi_n(z)$, обладающий свойствами 1) и 2) из леммы, является ортонормированным относительно некоторой вероятностной меры, и он также определяет первые n круговых параметров $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$. Свойство 3) дает необходимый рост нормы.

Теперь покажем, что свойства 4) и 5) обеспечивают существование меры из класса Стеклова $\sigma \in S_\delta$, для которой ϕ_n является n-м ортонормированным многочленом.

Заметим, что $\widetilde{F}$ задает соответствующую вероятностную (по свойству 4) из леммы) меру $\widetilde{\sigma}$, которая абсолютно непрерывна и имеет положительную гладкую плотность $\widetilde{\sigma}'$, задаваемую равенством

$$\widetilde{\sigma}'(\theta) = \frac{\operatorname{Re}\widetilde{F}(e^{i\theta})}{2\pi}. \tag{3.9}$$

Обозначим ее круговые параметры через $\{\widetilde{\gamma}_j\}$, $j = 0, 1, \dots$, и соответствующие ортонормированные многочлены первого и второго рода через $\{\widetilde{\phi}_j\}$ и $\{\widetilde{\psi}_j\}$, $j = 0, 1, \dots$, соответственно. Заметим, что нормировка меры $\widetilde{\sigma}$ влечет за собой $\widetilde{\phi}_0 = \widetilde{\psi}_0 = 1$. Теорема Бакстера [10] дает $\widetilde{\gamma}_j \in \ell^1$ (на деле убывание гораздо быстрее, но ℓ^1 достаточно для наших целей). Затем мы образуем вероятностную меру σ со следующими круговыми параметрами:

$$\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1, \dots.$$

Мы покажем, что эта мера и есть искомая мера из класса Стеклова, для которой ϕ_n является n-м ортонормированным многочленом.

Докажем, что $\sigma \in S_\delta$. Положим

$$\gamma_n = \widetilde{\gamma}_0, \qquad \gamma_{n+1} = \widetilde{\gamma}_1, \qquad \dots . \tag{3.10}$$

Теорема Бакстера утверждает, что σ абсолютно непрерывна, σ' принадлежит винеровскому классу $W(\mathbb{T})$ и σ' положительна на $\mathbb{T}$. Первыми n ортонормированными многочленами, соответствующими мере σ, будут $\{\phi_j\}$, $j = 0, \dots, n-1$.

В [3] получено основное тождество, которое позволяет вычислять многочлены ϕ_j и ψ_j (ортонормированные с σ) для индексов $j > n$:

$$2\phi^*_{n+m} = \phi_n(\widetilde{\phi}^*_m - \widetilde{\psi}^*_m) + \phi^*_n(\widetilde{\phi}^*_m + \widetilde{\psi}^*_m) = \widetilde{\phi}^*_m\bigl(\phi_n + \phi^*_n + \widetilde{F}_m(\phi^*_n - \phi_n)\bigr), \tag{3.11}$$

где

$$\widetilde{F}_m(z) = \frac{\widetilde{\psi}^*_m(z)}{\widetilde{\phi}^*_m(z)}.$$

Так как $\{\widetilde{\gamma}_n\} \in \ell^1$ и $\{\gamma_n\} \in \ell^1$, мы имеем [10, p. 225]

$$\widetilde{F}_m \to \widetilde{F}, \quad m \to \infty, \qquad \phi^*_n \to \Pi, \quad \widetilde{\phi}^*_n \to \widetilde{\Pi}, \quad n \to \infty,$$

равномерно на $\overline{\mathbb{D}}$. Функции Π и $\widetilde{\Pi}$ являются функциями Сегё для σ и $\widetilde{\sigma}$ соответственно, т.е. они внешние функции в $\mathbb{D}$, что дает факторизацию

$$|\Pi|^{-2} = 2\pi\sigma', \qquad |\widetilde{\Pi}|^{-2} = 2\pi\widetilde{\sigma}'. \tag{3.12}$$

Теперь в (3.11) устремляем $m \to \infty$ и получаем

$$2\Pi = \widetilde{\Pi}\bigl(\phi_n + \phi^*_n + \widetilde{F}(\phi^*_n - \phi_n)\bigr). \tag{3.13}$$

Итак, первая формула в (3.12) показывает, что в классе достаточно регулярных мер условие Стеклова $\sigma' > \delta/(2\pi)$ эквивалентно

$$\bigl|\widetilde{\Pi}\bigl(\phi_n + \phi^*_n + \widetilde{F}(\phi^*_n - \phi_n)\bigr)\bigr| \le \frac{2}{\sqrt{\delta}}, \qquad z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}. \tag{3.14}$$

Так как $|\phi_n| = |\phi^*_n|$ на $\mathbb{T}$, имеем

$$\bigl|\widetilde{\Pi}\bigl(\phi_n + \phi^*_n + \widetilde{F}(\phi^*_n - \phi_n)\bigr)\bigr| \le 2|\widetilde{\Pi}|\bigl(|\phi^*_n| + |\widetilde{F}(\phi^*_n - \phi_n)|\bigr) < 2C_1(\delta)|\widetilde{\Pi}|(\operatorname{Re}\widetilde{F})^{1/2} = 2C_1(\delta)$$

благодаря (3.8), (3.9) и второй формуле в (3.12). Таким образом, для выполнения (3.14) нам нужно положить $C_1(\delta) := \delta^{-1/2}$ в (3.8). Так как мы предполагаем δ фиксированным, явные формулы для $C(\delta)$ и $C_1(\delta)$ не имеют значения. $\square$

3.4. Конструкции экстремального многочлена. В качестве многочлена, асимптотически близкого к экстремальному, в работе [3] была предложена следующая конструкция. Многочлен ϕ^*_n брался в виде

$$\phi^*_n(z) = C_n f_n(z), \qquad f_n(z) = P_m(z) + Q_m(z) + Q^*_m(z), \tag{3.15}$$

где P_m и Q_m — некоторые многочлены степени $2m-1$ и $m-1$ соответственно, $m = [\delta_1 n]$ с достаточно малым $\delta_1 > 0$ и нули многочлена Q_m лежат вне круга $\mathbb{D}$. Отметим, что здесь Q^*_m определяется применением операции $*$ порядка n. Константа C_n выбирается так, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\phi^*_n|^{-2}\, d\theta = 2\pi$$

(т.е. мера ортогональности многочлена ϕ_n вероятностная, см. (3.6)). Заметим, что одной из основных технических трудностей при применении леммы 3.3 в [3] была проверка того, что

$$C_n = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_n|^{-2}\, d\theta \right)^{1/2} \sim 1 \tag{3.16}$$

равномерно по n. Затем для доказательства искомой оценки снизу (3.5) достаточно показать, что f_n обладает остальными свойствами из леммы.

Объясним назначение слагаемых, составляющих многочлен ϕ_n^* в (3.15). Так как Q_m выбирается с нулями вне $\mathbb{D}$, то все (в точности n) нулей $Q_m + Q_m^*$ расположатся на единичной окружности $\mathbb{T}$. Так как ожидается, что многочлен ϕ_n^*, определенный в (3.15), будет ортогональным на $\mathbb{T}$, нули $Q_m + Q_m^*$ в (3.15) должны быть "вытолкнуты" из $\mathbb{D}$ с помощью многочлена P_m, выбранного подходящим образом. Этот "выталкивающий" многочлен P_m не имеет другого предназначения, и у него маленький модуль. Таким образом, главный вклад в многочлен ϕ_n^* на единичной окружности дает $Q_m + Q_m^*$ (соответствующее утверждение доказано в [3]). Приведем подходящее представление для этого члена. Имеем

$$\begin{aligned} Q_m + Q_m^* &= |Q_m| \exp(i \operatorname{Arg}(Q_m)) + |Q_m| \exp(in\theta - i \operatorname{Arg}(Q_m)) = \\ &= 2|Q_m| \exp\left(\frac{in\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2} - \operatorname{Arg}(Q_m)\right) = \\ &= 2 \exp\left(\frac{in\theta}{2}\right) \sqrt{\mathcal{A}(\theta)} \cos\left(\left(\frac{n}{2} - m + 1\right)\theta + \Phi(\theta)\right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали обозначения

$$\mathcal{A}(\theta) := |Q(e^{i\theta})|^2, \qquad \Phi(\theta) := \operatorname{Arg}(Q_m^*(e^{i\theta})), \qquad \theta \in (0, 2\pi),$$

где операция $*$ применена к степени $m-1$. Ясно, что при проверке условия (3.16) необходимо иметь контроль над аргументом Q_m и его производной. Имеем

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathcal{A}'(\varphi)}{\mathcal{A}(\varphi)} \ln\left|\sin\frac{\varphi - \theta}{2}\right| d\varphi, \tag{3.17}$$

$$\Phi'(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathcal{A}'(\varphi)}{\mathcal{A}(\varphi)}\right)' \ln\left|\sin\frac{\varphi - \theta}{2}\right| d\varphi. \tag{3.18}$$

Мы видим из этих представлений, что для контроля $Q_m + Q_m^*$ на единичной окружности нам потребуются асимптотика для величины $|Q_m|^2$ и оценки двух ее производных.

В [3] многочлен $Q_m(z)$ был определен как алгебраический многочлен (по степеням z) без нулей в $\mathbb{D}$, который получается с помощью факторизации Рисса–Фейера положительного тригонометрического многочлена:

$$|Q_m(z)|^2 := \mathcal{G}_m(\theta) + \left|R_{(m,\alpha/2)}(e^{i\theta})\right|^2, \tag{3.19}$$

состоящего из

$$\mathcal{G}_m(\theta) = \mathcal{F}_m(\theta) + \frac{1}{2}\mathcal{F}_m\left(\theta - \frac{\pi}{m}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{F}_m\left(\theta + \frac{\pi}{m}\right), \tag{3.20}$$

где $\mathcal{F}_m$ — ядро Фейера

$$\mathcal{F}_m(\varphi) = \frac{\sin^2 \frac{m\varphi}{2}}{m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \qquad \mathcal{F}_m(0) = m, \qquad \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{F}_m(\varphi)\, d\varphi = 2\pi, \tag{3.21}$$

и $R_{(k,\alpha)}$ — тейлоровское приближение функции $(1-z)^{-\alpha}$, т.е.

$$R_{(k,\alpha)}(z) = c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j z^j, \tag{3.22}$$

где параметр $\alpha \in (1/2, 1)$.

В [3] многочлен P_m (из определения многочлена ϕ_n^* в (3.15)), сталкивающий нули с единичной окружности, задан как

$$P_m(z) = Q_m(z)(1-z)\big(1 - 0.1R_{(m,-(1-\alpha))}(z)\big). \tag{3.23}$$

Его степень $\deg P_m = 2m+1$ меньше n с учетом выбора маленького δ_1.

Наконец, в качестве функции Каратеодори $\widetilde{F}$ (из свойства 4) леммы 3.3), обеспечивающей условие Стеклова (посредством свойства 5) из леммы 3.3) для меры ортогональности многочлена ϕ_n, в [3] предложена функция

$$\widetilde{F}(z) = \widetilde{C}_n\big(\rho(1+\epsilon_n - z)^{-1} + (1+\epsilon_n - z)^{-\alpha}\big), \tag{3.24}$$

где $\epsilon_n = n^{-1}$, $\rho \in (0, \rho_0)$, ρ_0 достаточно мало, а положительная константа выбирается при проверке свойств из леммы 3.3. Ясно, что $\widetilde{F}$ — гладкая функция с положительной действительной частью в $\overline{\mathbb{D}}$.

Таким образом, как доказано в [3], формулы (3.15), (3.19), (3.20), (3.22)–(3.24) дают явное выражение для ортогонального многочлена ϕ_n и функции Каратеодори $\widetilde{F}$, удовлетворяющих лемме 3.3 и тем самым решающих задачу (3.5). Заметим, что приведенные здесь явные выражения решают задачу (3.5) для маленьких δ. Для доказательства сформулированных в теореме 1.1 решения задачи (1.12) для $\delta \in (0,1)$, а также утверждения 2) (построение подпоследовательности максимально возможного роста) эти явные конструкции ϕ_n и $\widetilde{F}$ последовательно усложнялись. Тем не менее основную смысловую нагрузку нового метода, предложенного в [3], несут приведенные здесь явные конструкции для маленьких δ.

Теперь объясним назначение обоих членов, составляющих в (3.19) положительный тригонометрический многочлен $|Q_m(z)|^2$. Мы видим, что первый член $\mathcal{G}_m$ в (3.19) ("шапочка") обеспечивает желаемый рост ортогонального многочлена

$$|\phi_n(1)| \sim \sqrt{n}.$$

В нашей конструкции тригонометрический многочлен Q_m должен сохранять большой модуль на интервале порядка $1/m$. Нам нужно это, чтобы сохранить ограниченные производные многочлена и, следовательно, иметь достаточно гладкие функции Сегё, обеспечивающие условие Стеклова для меры ортогональности. Так как ядро Фейера убывает очень быстро, для достижения этих требований мы берем сумму трех ядер (см. (3.20)). Также нам требуется, чтобы вне этого интервала порядка $1/m$ многочлен имел контролируемое убывание, которое опять же не должно быть таким быстрым, как у ядра Фейера. В (3.19) это назначение для многочлена $R_{(m,\alpha/2)}$ ("крылышки").

Асимптотика нормы тригонометрического многочлена Q_m (определенного в (3.19)–(3.22)) и оценки сверху его первой и второй производных получены в [3, Appendices A, B] (см. [3, Lemmas 5.2, 5.3, proof of Lemma 6.1]). Эти довольно тонкие технические оценки приводят к ключевой лемме [3, Lemma 6.1] (необходимой для доказательства (3.16)), которая контролирует фазу $Q_m(e^{i\theta})$ (обозначим ее через Φ) для $|\theta| < \upsilon$, где υ — некоторое маленькое фиксированное число:

$$|\Phi'(\theta)| \lesssim m. \tag{3.25}$$

В настоящей работе, чтобы разнообразить подходы и конструкции для проверки технически трудных мест в доказательстве теоремы 1.1, мы введем в рассмотрение отличную от использованной в [3] (см. (3.20) и (3.22)) явную форму многочленов Q_m в (3.15) и докажем оценки для $|Q_m|$ и его производных, необходимые для проверки (3.16) (см. разд. 4). Сохраняя описанные выше общие требования к многочлену Q_m, мы определим иные, чем в (3.20) и (3.22), члены в конструкции Q_m. Положим (см. [4])

$$\mathcal{A}(\theta) := |Q(e^{i\theta})|^2 := (q \otimes \mathcal{F}_m)(\theta), \tag{3.26}$$

где $q \otimes \mathcal{F}_m$ является сверткой с ядром Фейера $\mathcal{F}_m$ (3.21) функции

$$q(\theta) = me^{-m^2 \sin^2(\theta/2)} + \left(m^{-2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha/2} =: q_1 + q_2, \tag{3.27}$$

которая разбивается на два члена (в соответствии с (3.19)), т.е. “шапочку” q_1 и “крылышки” q_2.

4. ОЦЕНКИ СВЕРТОК ФЕЙЕРА В КОНСТРУКЦИИ МНОГОЧЛЕНА Q_m

Целью этого раздела является получение оценок, соответствующих результатам из [3, appendices], которые нужны для доказательства (3.25), что в итоге приводит к проверке (3.16) для новых входных данных (3.26), (3.27).

4.1. Формулировка результатов. В этом пункте мы сформулируем полученные оценки (см. [4]). Мы начнем с “шапочки”

$$\mathcal{A}_1(x) := (q_1 \otimes \mathcal{F}_m)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} q_1(t)\mathcal{F}_m(x-t)\,dt, \qquad q_1(t) = me^{-m^2\sin^2(t/2)}.$$

Прежде чем формулировать результат об асимптотике $\mathcal{A}_1(x)$ и производных $\mathcal{A}_1'(x)$, $\mathcal{A}_1''(x)$ при $m \to \infty$, мы введем последовательность целых функций $\{E_l\}$:

$$E_0(r) := (r-1)e^{-r^2}, \qquad E_1(r) := r(r-1)e^{-r^2}, \qquad E_2(r) := (r-1)(2r^2-1)e^{-r^2}.$$

Обозначим через $\left\{c_j^{(l)}\right\}$ коэффициенты степенного разложения $E_l(r)$ в окрестности $r = 1$:

$$E_l(r) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(l)}(1-r)^j.$$

Это позволяет образовать два других множества целых функций

$$\widetilde{C}_l(t) := \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \widetilde{c}_\nu^{(l)} t^{2\nu}, \qquad \widetilde{S}_l(t) := \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \widetilde{s}_\nu^{(l)} t^{2\nu+1}$$

с коэффициентами

$$\widetilde{c}_\nu^{(l)} := \sum \frac{c_j^{(l)} j!}{(j+2\nu+1)!}, \qquad \widetilde{s}_\nu^{(l)} := \sum \frac{c_j^{(l)} j!}{(j+2\nu+2)!}.$$

Лемма 4.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ при $m \to \infty$ имеем*

$$\mathcal{A}_1(x) = \begin{cases} m\dfrac{\sqrt{\pi}x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}\widetilde{C}_0(mx) + O(mx), & |x|m \le \dfrac{1}{\varepsilon}, \\ \dfrac{1}{m}\dfrac{\sqrt{\pi}\big(1 - \frac{\cos mx}{e}\big)}{\sin^2\frac{x}{2}} + O\bigg(\dfrac{1}{m^2x^2}\bigg), & |x|m \ge \dfrac{1}{\varepsilon}, \end{cases}$$

и для производных

$$\mathcal{A}_1'(x) = \begin{cases} m^2\dfrac{-\sqrt{\pi}x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}\widetilde{S}_1(mx) + O(m), & |x|m \le \dfrac{1}{\varepsilon}, \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{e}\dfrac{\sin mx}{\sin^2\frac{x}{2}} + O\bigg(\dfrac{1}{mx^2}\bigg), & |x|m \ge \dfrac{1}{\varepsilon}, \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_1''(x) = \begin{cases} m^3\dfrac{-\sqrt{\pi}x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}\big(\widetilde{C}_0(mx) + \widetilde{C}_2(mx)\big) + O(m^{7/3}), & |x|m \le \dfrac{1}{\varepsilon}, \\ m\dfrac{\sqrt{\pi}}{e}\dfrac{\cos mx}{\sin^2\frac{x}{2}} + O\bigg(\dfrac{1}{mx^3}\bigg), & |x|m \ge \dfrac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

При этом функция $\widetilde{C}_0(\xi)$ четна и

$$\widetilde{C}_0(\xi) > 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Теперь перейдем к “крылышкам”

$$\mathcal{A}_2(\theta) := (q_2 \otimes \mathcal{F}_m)(\theta) := \int\limits_{-\pi}^{\pi} q_2(t)\mathcal{F}_m(\theta - t)\,dt.$$

Лемма 4.2.

$$\mathcal{A}_2(\theta) \asymp \max\bigg(\frac{1}{m}, |\theta|\bigg)^{-\alpha}, \qquad \theta \in [-\pi, \pi]. \tag{4.2}$$

Для производных $\mathcal{A}_2' = q_2' \otimes \mathcal{F}_m$, $\mathcal{A}_2'' = q_2'' \otimes \mathcal{F}_m$ мы получили оценку сверху (ср. [3, Lemma 5.2]).

Лемма 4.3.

$$|\mathcal{A}_2'(\theta)| \lesssim m^{\alpha+1}\min\bigg(1, \frac{1}{m\theta}\bigg)^{\alpha+1}, \qquad |\mathcal{A}_2''(\theta)| \lesssim m^{\alpha+2}\min\bigg(1, \frac{1}{m\theta}\bigg)^{2}.$$

4.2. Асимптотика “шапочки” и ее производных. Здесь мы докажем лемму 4.1 об асимптотике величин

$$\mathcal{A}_1^{(p)}(x) := \int\limits_{-\pi}^{\pi} q_1^{(p)}(t)\mathcal{F}_m(x - t)\,dt, \qquad p = 0, 1, 2, \tag{4.3}$$

где, напомним,

$$q_1(t) = me^{-m^2\sin^2(t/2)}, \qquad \mathcal{F}_m(\varphi) = \frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{m\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Доказательство леммы 4.1. Мы начнем с общего подхода к оценке (4.3) для произвольного p. Затем конкретизируем общий результат для $p = 0, 1, 2$. Общий подход состоит из следующих шагов.

1. Разобьем интеграл (4.3) на две части

$$\mathcal{A}_1^{(p)} = \int\limits_{-m^{-2/3}}^{m^{-2/3}} \ldots + \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus[-m^{-2/3},m^{-2/3}]} \ldots =: \widetilde{\mathcal{A}}_{1p} + \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}_{1p},$$

где второй интеграл оценивается как

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}_{1p} = O\Bigl(m^{2+2p} e^{-\frac{m^{2/3}}{4}}\Bigr). \tag{4.4}$$

2. Введем обозначения

$$S_m(x,t) := e^{-\frac{m^2t^2}{4}} \frac{\sin^2 \frac{m}{2}(x-t)}{\bigl(\frac{x-t}{2}\bigr)^2}, \qquad f_p(x,t) := \frac{q_1^{(p)}(t)\bigl(\frac{x-t}{2}\bigr)^2}{m e^{-\frac{m^2t^2}{4}} \sin^2 \frac{x-t}{2}}.$$

Таким образом,

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{1p} = \int\limits_{-m^{-2/3}}^{m^{-2/3}} f_p(x,t)\, S_m(x,t)\, dt. \tag{4.5}$$

Возьмем разложение по t

$$f_p(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{F}_{p,j}(x,m) t^j \tag{4.6}$$

и заметим, что коэффициенты $\widetilde{F}_{p,j}$ ограничены для $x \in (-\pi,\pi)$. Теперь мы оставим первые N членов в степенном разложении и оценим остаток ряда, используя оценку $|t| < m^{-2/3}$:

$$f_p(x,t) = \sum_{j\le N} \widetilde{F}_{p,j}(x,m) t^j + \sum_{j>N} O(m^{k_j}) t^{l_j}. \tag{4.7}$$

Точность получаемой асимптотики будет зависеть от N.

3. Далее мы подставляем (4.7) в (4.5) и, используя оценки, как в (4.4), расширяем интервал интегрирования в (4.5) с $[-m^{-2/3}, m^{-2/3}]$ до $[-\infty,\infty]$:

$$\mathcal{A}_1^{(p)} = \sum_{j\le N} \widetilde{F}_{p,j}(x,m)\, J_j(x,m) + \sum_{j>N} O(m^{k_j})\, \widetilde{J}_{l_j}(x,m), \tag{4.8}$$

где

$$J_j(x,m) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^j S_m(x,t)\, dt, \qquad \widetilde{J}_j(x,m) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^j S_m(x,t)\, dt.$$

Это представление влечет за собой

$$J_{2k}(x,m) = \widetilde{J}_{2k}(x,m) > 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

4. Затем мы рассматриваем интегралы J_j. Мы используем тождество

$$\frac{\sin^2\frac{m(x-t)}{2}}{\left(\frac{x-t}{2}\right)^2} = 2m^2\int\limits_0^1\int\limits_0^s \cos(rm(x-t))\,dr\,ds = 2m^2\int\limits_0^1\int\limits_r^1 \cos(rm(x-t))\,ds\,dr.$$

Оно дает нам

$$J_j(x,m) = 2m^2\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^j e^{-\frac{m^2t^2}{4}}\int\limits_r^1 \cos(rm(x-t))\,ds\,dt\,dr.$$

По s и по t можно явно проинтегрировать:

$$\begin{aligned} J_{2k} &= 2^{k+2}\frac{(-1)^{k+1}\sqrt{\pi}}{m^{2k-1}}\int\limits_0^1 \cos(rmx)\,E_{2k}(r)\,dr,\\ J_{2k+1} &= 2^{k+3}\frac{(-1)^{k+1}\sqrt{\pi}}{m^{2k}}\int\limits_0^1 \sin(rmx)\,E_{2k+1}(r)\,dr, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где $E_l(r)$ — некоторые целые функции:

$$E_0 := (r-1)e^{-r^2}, \qquad E_1 = r(r-1)e^{-r^2}, \qquad E_2 := (r-1)(2r^2-1)e^{-r^2}, \qquad \dots.$$

Итак, для завершения описания общего подхода мы должны объяснить, как получить асимптотику $J_l(x,m)$ при $m\to\infty$. Эту асимптотику мы будем получать в двух областях

$$|x|m \le \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{и} \qquad |x|m \ge \frac{1}{\varepsilon} \qquad \forall\varepsilon>0.$$

5. Для ограниченных $|x|m$ мы берем степенные разложения целых функций $E_l(r)$ в точке $t=1$:

$$E_l(r) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(l)}(1-r)^j,$$

и подставляем их в (4.10). Раскладывая полученные интегралы по mx:

$$\int\limits_0^1 \cos(rmx)\,(1-r)^j\,dr = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu j!\,(mx)^{2\nu}}{(j+2\nu+1)!}, \qquad \int\limits_0^1 \sin(rmx)\,(1-r)^j\,dr = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu j!\,(mx)^{2\nu+1}}{(j+2\nu+2)!},$$

мы формируем другие целые функции

$$\widetilde{C}_l(t) := \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \widetilde{c}_\nu^{(l)} t^{2\nu}, \qquad \widetilde{S}_l(t) := \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \widetilde{s}_\nu^{(l)} t^{2\nu+1}$$

с коэффициентами

$$\widetilde{c}_\nu^{(l)} := \sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j^{(l)} j!}{(j+2\nu+1)!}, \qquad \widetilde{s}_\nu^{(l)} := \sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j^{(l)} j!}{(j+2\nu+2)!}.$$

Таким образом, для конечных $|x|m$ мы получаем следующее представление для интегралов (4.10):

$$J_{2k}(x,m) = \frac{(-1)^{k+1}\sqrt{\pi}\cdot 2^{k+2}}{m^{2k-1}}\widetilde{C}_{2k}(mx), \qquad J_{2k+1}(x,m) = \frac{(-1)^{k+1}\sqrt{\pi}\cdot 2^{k+3}}{m^{2k}}\widetilde{S}_{2k+1}(mx). \tag{4.11}$$

Для $k=0$ первая из этих формул вместе с (4.9) дает (4.1).

6. Для растущих $|x|m$ мы интегрируем по частям в (4.10). Имеем

$$J_0(x,m) = -4\sqrt{\pi}m\Biggl\{\Bigl(\frac{\cos mx}{e}-1\Bigr)(mx)^{-2}+\frac{4}{e}\sin mx\,(mx)^{-3}+ \\ +\Biggl[\frac{6}{e}(1-\cos mx)+4\int\limits_0^1(\cos rmx-1)\mathcal{P}_5(r)e^{-r^2}\,dr\Biggr](mx)^{-4}\Biggr\},$$

где $\mathcal{P}_5(r)$ — некоторый многочлен с $\deg\mathcal{P}_5=5$. Таким образом,

$$J_0(x,m) = 4\sqrt{\pi}m\Bigl(1-\frac{\cos mx}{e}\Bigr)\frac{1}{(mx)^2}+O\biggl(\frac{1}{m^2x^3}\biggr). \tag{4.12}$$

Аналогично

$$J_1(x,m) = -\frac{8\sqrt{\pi}}{e}\sin mx\frac{1}{(mx)^2}+O\biggl(\frac{1}{m^3x^3}\biggr) \tag{4.13}$$

и т.д.:

$$J_2(x,m) = \frac{8\sqrt{\pi}}{m}\Bigl(\frac{\cos mx}{e}+1\Bigr)\frac{1}{(mx)^2}+O\biggl(\frac{1}{m^4x^3}\biggr),$$

$$J_3(x,m) = \frac{16\sqrt{\pi}}{m^2}\Bigl(\frac{\sin mx - mx}{e}\Bigr)\frac{1}{(mx)^2}+O\biggl(\frac{1}{m^5x^3}\biggr).$$

Теперь мы готовы к анализу специальных случаев $\mathcal{A}_1^{(p)}$, $p=0,1,2$. Мы будем использовать обозначения

$$a(x) := \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2, \qquad b(x) := \frac{x^2\cos\frac{x}{2}-2x\sin\frac{x}{2}}{4\sin^3\frac{x}{2}}.$$

Случай $p=0$. Имеем

$$f_0(x,t) = \exp\biggl\{\frac{m^2t^2}{4}-m^2\sin^2\frac{t}{2}\biggr\}a(x-t) = \\ = a(x)+b(x)t+O(1)t^2+O(1)t^3+\biggl(\frac{1}{48}a(x)m^2+O(1)\biggr)t^4+\dots.$$

Заметим, что показатели в этом ряде имеют следующую периодическую структуру:

$$O(m^{2k})t^{4k},\quad O(m^{2k})t^{4k+1},\quad O(m^{2k})t^{4k+2},\quad O(m^{2k})t^{4k+3},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Таким образом,

$$f_0(x,t) = a(x)+O(1)t, \qquad t\in\bigl[-m^{-2/3},m^{-2/3}\bigr].$$

Это дает нам

$$\mathcal{A}_1 = a(x)J_0(x,m)+O(1)\widetilde{J}_1(x,m),$$

где $O(1)$ ограничено как функция от x и m. Отсюда, используя (4.11) и (4.12), мы получаем утверждение леммы 4.1 для $p=0$.

Случай $p=1$. Имеем

$$f_1(x,t) = -\frac{m^2}{2}\exp\biggl\{\frac{m^2t^2}{4} - m^2\sin^2\frac{t}{2}\biggr\}\sin t\cdot a(x-t) =$$

$$= -m^2\frac{a(x)}{2}t - m^2\frac{b(x)}{2}t^2 + O(1)m^2t^3 + O(1)m^2t^4 - \biggl(\frac{m^4a(x)}{96} + O(1)m^2\biggr)t^5 + \dots .$$

Таким образом,

$$f_1(x,t) = -m^2\frac{a(x)}{2}t + O(m^2)t^2, \qquad t\in\bigl[-m^{-2/3}, m^{-2/3}\bigr].$$

Это дает нам

$$\mathcal{A}_1^{(1)} = -m^2\frac{a(x)}{2}J_1(x,m) + O(m^2)J_2(x,m).$$

Теперь, используя (4.11) и (4.13), мы получаем утверждение леммы 4.1 для $p=1$.

Случай $p=2$. Имеем

$$f_2(x,t) = -\frac{m^2}{4}\exp\biggl\{\frac{m^2t^2}{4} - m^2\sin^2\frac{t}{2}\biggr\}(2\cos t - m^2\sin^2 t)\,a(x-t).$$

Разложение по t^ν влечет за собой

$$f_2(x,t) = -m^2\frac{a(x)}{2}\biggl(1-\frac{m^2t^2}{2}\biggr) - m^2\frac{b(x)}{2}\biggl(t-\frac{m^2t^3}{2}\biggr) + \frac{m^6a(x)}{192}t^6 + O(m^{4/3})$$

при $t\in[-m^{-2/3}, m^{-2/3}]$. Это дает нам

$$\mathcal{A}_1^{(2)} = -m^2\frac{a(x)}{2}\biggl(J_0 - \frac{m^2}{2}J_2\biggr) - m^2\frac{b(x)}{2}\biggl(J_1 - \frac{m^2}{2}J_3\biggr) + O(m^{4/3})J_0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$J_0 - \frac{m^2}{2}J_2 = -8\sqrt{\pi}m\int_0^1 \cos(rmx)\,r^2(r-1)e^{-r^2}\,dr = -\frac{8\sqrt{\pi}}{e}m\cos mx\frac{1}{(mx)^2} + O\biggl(\frac{1}{m^3x^4}\biggr),$$

$$J_1 - \frac{m^2}{2}J_3 = -16\sqrt{\pi}m\int_0^1 \sin(rmx)\,r(r+1)(r-1)^2e^{-r^2}\,dr =$$

$$= \frac{32\sqrt{\pi}}{e}(2\cos mx + e)\frac{1}{(mx)^3} + O\biggl(\frac{1}{m^4x^4}\biggr).$$

Теперь, используя (4.11), мы получаем утверждение леммы 4.1 для $p=2$.

Лемма 4.1 доказана. $\square$

4.3. Асимптотика “крылышек”. Здесь мы докажем лемму 4.2 об асимптотике значений второго слагаемого в представлении (3.26), (3.27) для $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}_2(\theta) := (q_2\otimes\mathcal{F}_m)(\theta) := \int_{-\pi}^{\pi} q_2(t)\mathcal{F}_m(\theta-t)\,dt.$$

Доказательство леммы 4.2. Начнем с оценки снизу. Имеем для ядра Фейера

$$\mathcal{F}_n(t) \geq \begin{cases} \dfrac{4n}{\pi^2}, & |t| < \dfrac{\pi}{n}, \\ 0, & |t| > \dfrac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Следовательно (ввиду положительности q_2),

$$(q_2 \otimes \mathcal{F}_n)(\theta) \geq \int\limits_{\theta-\frac{\pi}{n}}^{\theta+\frac{\pi}{n}} \frac{4n}{\pi^2} q_2(t)\,dt \geq \int\limits_{\theta-\frac{\pi}{n}}^{\theta+\frac{\pi}{n}} \frac{4n}{\pi^2}\left(\frac{1}{n}+\frac{|t|}{2}\right)^{-\alpha} dt,$$

где мы использовали то, что $\alpha > 0$. Есть две возможности:

$$|\theta| < \frac{\pi}{n} \qquad \Rightarrow \qquad |t| \lesssim \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{n}+\frac{|t|}{2}\right)^{-\alpha} \asymp n^\alpha$$

или

$$|\theta| \geq \frac{\pi}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{n}+\frac{|t|}{2} \asymp \frac{1}{n}+\frac{|\theta|}{2} \asymp |\theta|.$$

Оценка снизу в (4.2) доказана.

Теперь займемся оценкой сверху. Имеем для ядра Фейера

$$\mathcal{F}_n(t) \leq \begin{cases} n, & |t| < \dfrac{\pi}{n}, \\ \dfrac{\pi^2}{nt^2}, & |t| > \dfrac{\pi}{n}. \end{cases} \tag{4.14}$$

Следовательно,

$$(q_2 \otimes \mathcal{F}_n)(\theta) \leq \int\limits_{\theta-\frac{\pi}{n}}^{\theta+\frac{\pi}{n}} n\left(\frac{|t|}{\pi}\right)^{-\alpha} dt + \int\limits_{\theta+\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\pi^2}{n}\left(\frac{|t|}{\pi}\right)^{-\alpha} \frac{dt}{(\theta-t)^2} + \int\limits_{-\pi}^{\theta-\frac{\pi}{n}} \frac{\pi^2}{n}\left(\frac{|t|}{\pi}\right)^{-\alpha} \frac{dt}{(\theta-t)^2}.$$

Обозначим интегралы в правой части через I_1, I_2, I_3. Используя симметрию, можно положить $\theta \in (0,\pi/2)$. Случай $\theta \in (\pi/2,\pi)$ рассматривается аналогично. Для I_1 имеем

$$|\theta| \leq \frac{\pi}{n} \qquad \Rightarrow \qquad h := \frac{n}{\pi}|\theta| \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad I_1 = \frac{\pi n^\alpha}{1-\alpha}\big((1+h)^{1-\alpha}+(1-h)^{1-\alpha}\big) \asymp n^\alpha,$$

где мы использовали то, что $\alpha < 1$, и

$$|\theta| > \frac{\pi}{n} \qquad \Rightarrow \qquad h > 1 \qquad \Rightarrow \qquad I_1 = \frac{\pi n^\alpha}{1-\alpha}\big((h+1)^{1-\alpha}-(h-1)^{1-\alpha}\big) \asymp n^\alpha h^{-\alpha} = |\theta|^{-\alpha}.$$

Для рассмотрения I_2 сделаем замену переменной

$$u\colon \qquad \frac{1}{\theta-t} = \frac{-u}{\theta}.$$

Тогда

$$I_2 = \int\limits_{\frac{\theta}{\pi-\theta}}^{\frac{n\theta}{\pi}} \left(\frac{\pi^2}{n\theta}\right)\left(\frac{\theta}{\pi}\,\frac{u+1}{u}\right)^{-\alpha} du = \frac{\pi^2}{n}\pi^{-\alpha}\theta^{-\alpha-1} \int\limits_{\frac{\theta}{\pi-\theta}}^{\frac{n\theta}{\pi}} \left(\frac{u+1}{u}\right)^{-\alpha} du.$$

Заметим, что для значений подынтегральной функции $\left(\frac{u+1}{u}\right)^{-\alpha} \in (0,1)$, следовательно,

$$|\theta| > \frac{\pi}{n} \qquad \Rightarrow \qquad I_2 = O(n^{-1}\theta^{-\alpha-1}n\theta) = O(\theta^{-\alpha})$$

или

$$|\theta| \le \frac{\pi}{n} \qquad \Rightarrow \qquad I_2 < \frac{\pi^2}{n}\pi^{-\alpha}\theta^{-\alpha-1}\int\limits_0^{\frac{n\theta}{\pi}} u^\alpha\,du = O(n^\alpha).$$

Для рассмотрения I_3 сделаем замену переменных

$$u\colon \qquad \frac{1}{\theta - t} = \frac{u}{\theta}.$$

Имеем

$$I_3 = \int\limits_{\frac{\theta}{\pi+\theta}}^{\frac{n\theta}{\pi}} \frac{\pi^2}{n\theta}\left(\frac{\theta}{\pi}\left|\frac{1-u}{u}\right|\right)^{-\alpha} du = \frac{\pi^{2+\alpha}}{n\theta^{1+\alpha}}\int\limits_{\frac{\theta}{\pi+\theta}}^{\frac{n\theta}{\pi}} u^\alpha|1-u|^{-\alpha}\,du.$$

Этот интеграл оценим для трех областей значений параметра θ. В первом случае

$$\frac{n\theta}{\pi} < \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad |1-u|^{-\alpha} < 2^\alpha \qquad \Rightarrow \qquad I_3 < \frac{2^\alpha\pi^{2+\alpha}}{n\theta^{1+\alpha}}\int\limits_0^{\frac{n\theta}{\pi}} u^\alpha\,du \sim n^\alpha.$$

Во втором случае имеем

$$\frac{1}{2} \le \frac{n\theta}{\pi} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad I_3 < \pi n^\alpha\left(\frac{n\theta}{\pi}\right)^{-\alpha-1}\int\limits_0^1 u^\alpha(1-u)^{-\alpha}\,du = 2^{\alpha+1}\pi n^\alpha\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha} \sim n^\alpha.$$

Наконец, в третьем случае $1 \le n\theta/\pi$ мы разобьем интеграл на три части:

$$I_3 < \frac{\pi^{2+\alpha}}{n\theta^{1+\alpha}}\left(\int\limits_0^1 u^\alpha(1-u)^{-\alpha}\,du + \int\limits_1^\infty\left[\left(\frac{u}{u-1}\right)^\alpha - 1 - \frac{\alpha}{u}\right]du + \int\limits_1^{\frac{n\theta}{\pi}}\left(1-\frac{\alpha}{u}\right)du\right) =$$

$$= \frac{\pi^{2+\alpha}}{n\theta^{1+\alpha}}\left(\mathrm{const}(\alpha) + \frac{n\theta}{\pi} + \alpha\ln\frac{n\theta}{\pi}\right) \sim \theta^{-\alpha}.$$

Лемма 4.2 доказана. $\square$

4.4. “Крылышки”: оценки производных. Докажем лемму 4.3 о верхних оценках для производных

$$\mathcal{A}_2' = q_2' \otimes \mathcal{F}_m, \qquad \mathcal{A}_2'' = q_2'' \otimes \mathcal{F}_m, \qquad \text{где} \qquad q_2 = \left(\frac{1}{m^2} + \sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Доказательство леммы 4.3. Имеем

$$q_2' = -\frac{\alpha}{4}\sin t\left(\frac{1}{m^2} + \sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-1},$$

$$q_2'' = \frac{\alpha(\alpha+2)}{16}\sin^2 t\left(\frac{1}{m^2} + \sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-2} - \frac{\alpha}{4}\cos t\left(\frac{1}{m^2} + \sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Неравенство между средними геометрическим и арифметическим дает

$$a\left(\frac{1}{m^2}+a^2\right)^{\frac{-\beta-1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+a^2}}\left(\frac{\frac{1}{m^2\beta}}{\frac{1}{m^2}+a^2}\right)^{\frac{\beta}{2}}(\beta m^2)^{\frac{\beta}{2}} \le (\beta m^2)^{\frac{\beta}{2}}\left(\frac{\frac{a^2}{\frac{1}{m^2}+a^2}+\beta\frac{\frac{1}{m^2\beta}}{\frac{1}{m^2}+a^2}}{1+\beta}\right)^{\frac{\beta+1}{2}} =$$

$$= (\beta m^2)^{\frac{\beta}{2}}(\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{2}},$$

что позволяет оценить $q_2'(t)$ и $q_2''(t)$ сверху на $t\in[-\pi,\pi]$:

$$|q_2'| \le \frac{\alpha}{2}\sin\frac{t}{2}\left(\frac{1}{m^2}+\sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-1} \le \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+2)^{\alpha+2}}}\,m^{\alpha+1},$$

$$|q_2''| \le \frac{\alpha(\alpha+2)}{4}\sin^2\frac{t}{2}\left(\frac{1}{m^2}+\sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-2} + \frac{\alpha}{4}\left(\frac{1}{m^2}+\sin^2\frac{t}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-1} \le$$

$$\le \frac{\alpha}{4}\left(2+\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+4}\right)^{\frac{\alpha+4}{2}}\right)m^{\alpha+2}.$$

Мы также можем получить оценку сверху, используя степенное разложение по t:

$$|q_2'(t)| < \frac{\alpha}{4}|t|\left(\left(\frac{|t|}{\pi}\right)^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}-1} = \frac{\alpha\pi^{\alpha+2}}{4}|t|^{-\alpha-1},$$

$$|q_2''(t)| < \frac{\alpha(\alpha+2)}{16}t^2\left(\left(\frac{|t|}{\pi}\right)^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}-2} + \frac{\alpha}{4}\left(\left(\frac{|t|}{\pi}\right)^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}-1} = \frac{\alpha\pi^{\alpha+2}}{4}\left(1+(\alpha+2)\frac{\pi^2}{4}\right)|t|^{-\alpha-2}.$$

Таким образом,

$$|q_2'(t)| \lesssim \min\left(m,\frac{\pi}{|t|}\right)^{\alpha+1}, \qquad |q_2''(t)| \lesssim \min\left(m,\frac{\pi}{|t|}\right)^{\alpha+2}.$$

Теперь мы можем рассмотреть $\mathcal{A}_2'$ и $\mathcal{A}_2''$ на $[-\pi,\pi]$. Мы разбиваем интеграл на две части

$$\mathcal{A}_2'(\theta) = \int_{\mathbb{T}} q_2'(t)\mathcal{F}_m(\theta-t)\,dt = \int_{\frac{\theta}{2}-\pi}^{\frac{\theta}{2}} q_2'(t)\mathcal{F}_m(\theta-t)\,dt + \int_{\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}+\pi} q_2'(t)\mathcal{F}_m(\theta-t)\,dt$$

и получаем

$$|\mathcal{A}_2'(\theta)| \le \int_{\frac{\theta}{2}-\pi}^{\frac{\theta}{2}} |q_2'(t)|\,dt \max_{t\in[\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}+\pi]}|\mathcal{F}_m(t)| + \int_{\frac{\theta}{2}-\pi}^{\frac{\theta}{2}} |\mathcal{F}_m(t)|\,dt \max_{t\in[\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}+\pi]}|q_2'(t)|.$$

Мы использовали периодичность функций $\mathcal{F}$, $q_2^{(j)}$, $\mathcal{A}_2^{(j)}$ и их симметрию относительно нуля. Теперь мы вспомним (4.14):

$$|\mathcal{F}_m(t)| \le \frac{1}{m}\min\left(m,\frac{\pi}{|t|}\right)^2, \qquad t\in[-\pi,\pi].$$

Фиксируем $\theta > 0$, фиксируем период так, чтобы $\theta/2$ оказалось в середине периода, и продолжаем

$$|\mathcal{A}_2'(\theta)| \lesssim \frac{1}{m}\min\left(m, \frac{2\pi}{|\theta|}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \min\left(m, \frac{\pi}{|t|}\right)^{\alpha+1} dt + \min\left(m, \frac{2\pi}{|\theta|}\right)^{\alpha+1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{m}\min\left(m, \frac{\pi}{|t|}\right)^2 dt.$$

В итоге

$$|\mathcal{A}_2'(\theta)| \lesssim m^{\alpha+1}\min\left(1, \frac{1}{m\theta}\right)^2 + m^{\alpha+1}\min\left(1, \frac{1}{m\theta}\right)^{\alpha+1} \lesssim m^{\alpha+1}\min\left(1, \frac{1}{m\theta}\right)^{\alpha+1}.$$

Для $\mathcal{A}_2''$ мы делаем то же самое со сменой степени $\alpha+1$ на $\alpha+2$:

$$|\mathcal{A}_2''(\theta)| \lesssim m^{\alpha+2}\min\left(1, \frac{1}{m\theta}\right)^2 + m^{\alpha+2}\min\left(1, \frac{1}{m\theta}\right)^{\alpha+2} \lesssim m^{\alpha+2}\min\left(1, \frac{1}{m\theta}\right)^2,$$

но теперь доминирует первый член.

Лемма 4.3 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. *Амброладзе М.У.* О возможной скорости роста многочленов, ортогональных с непрерывным положительным весом // Мат. сб. 1991. Т. 182, №3. С. 332–353.
3. *Aptekarev A., Denisov S., Tulyakov D.* The sharp estimates on the orthogonal polynomials from the Steklov class: E-print, 2013. arXiv: 1308.6614v1 [math.CA].
4. *Aptekarev A.I., Denisov S.A., Tulyakov D.N.* Fejer convolutions for an extremal problem in the Steklov class: Препринт ИПМ 076. М.: Инст. прикл. мат., 2013.
5. *Геронимус Я.Л.* Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке: Оценки, асимптотические формулы, ортогональные ряды. М.: Физматгиз, 1958.
6. *Nevai P.G.* Orthogonal polynomials. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1979. (Mem. AMS.; V. 18, N 213).
7. *Рахманов Е.А.* О гипотезе Стеклова в теории ортогональных многочленов // Мат. сб. 1979. Т. 108, №4. С. 581–608.
8. *Рахманов Е.А.* Об оценках роста ортогональных многочленов, вес которых отграничен от нуля // Мат. сб. 1981. Т. 114, №2. С. 269–298.
9. *Shohat J.A., Hille E., Walsh J.L.* Bibliography on orthogonal polynomials. Washington: Natl. Acad. Sci., 1940.
10. *Simon B.* Orthogonal polynomials on the unit circle. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. Parts 1, 2.
11. *Stekloff W.* Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique // Ann. fac. sci. Toulouse. Sér. 2. 1900. V. 2. P. 207–272.
12. *Stekloff W.* Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré // Ann. fac. sci. Toulouse. Sér. 2. 1900. V. 2. P. 273–303.
13. *Stekloff W.* Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de Tchébycheff et, en particulier, suivant les polynomes de Jacobi // J. reine angew. Math. 1903. Bd. 125. S. 207–236.
14. *Stekloff W.* Sur une propriété remarquable de plusieurs développements, souvent emloyés dans l'analyse // C. r. Acad. sci. 1903. V. 136. P. 876–878.
15. *Stekloff W.* Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de Jacobi // C. r. Acad. sci. 1903. V. 136. P. 1230–1232.
16. *Stekloff W.* Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions souvent employées dans l'analyse. СПб.: Импер. АН, 1904. (Зап. Импер. АН физ.-мат. отд. Сер. 8; Т. 15, №7).
17. *Stekloff W.* Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les dites fonctions // Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Сер. 2. 1907. Т. 10. С. 97–201. Рус. перев.: *Стеклов В.А.* Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка, и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям. Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1956.

18. *Stekloff W.* Sur la condition de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales // C. r. Acad. sci. 1910. V. 151. P. 1116–1119.
19. *Stekloff W.* Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales // Изв. Импер. АН. VI сер. 1911. Т. 5. С. 754–757.
20. *Стекловъ В.* Объ одномъ приложенiи теорiи замкнутости къ задачѣ о разложенiи произвольныхъ функцiй въ ряды по полиномамъ Чебышева // Изв. Импер. АН. VI сер. 1913. Т. 7. С. 87–92.
21. *Stekloff W.* Quelques applications nouvelles de la théorie de fermeture au problème de représentation approchée des fonctions et au problème des moments. СПб.: Импер. АН, 1914. (Зап. Импер. АН физ.-мат. отд. Сер. 8; Т. 32, №4).
22. *Stekloff W.* Sur une application de la théorie de fermeture au problème de développement des fonctions arbitraires en séries procedant suivant les polynomes de Tchébycheff. Петроград: Импер. АН, 1914. (Зап. Импер. АН физ.-мат. отд. Сер. 8; Т. 33, №8).
23. *Stekloff W.* Application de la théorie de fermeture à la solution de certaines questions qui se rattachent au problème de moments. Петроград: Импер. АН, 1915. (Зап. Импер. АН физ.-мат. отд. Сер. 8; Т. 33, №9).
24. *Стекловъ В.А.* О приближенномъ вычисленiи опредѣленныхъ интеграловъ при помощи формулъ механическихъ квадратуръ: Сходимость формулъ механическихъ квадратуръ. (Сообщенiе первое) // Изв. Импер. АН. VI сер. 1916. Т. 10. С. 169–186.
25. *Stekloff W.* Théorème de fermeture pour les polynomes de Laplace–Hermite–Tchébychef // Изв. Импер. АН. VI сер. 1916. Т. 10. С. 403–416.
26. *Stekloff W.* Théorème de fermeture pour les polynomes de Tchébychef–Laguerre // Изв. Импер. АН. VI сер. 1916. Т. 10. С. 633–642.
27. *Stekloff W.* Sur le développement des fonctions arbitraries en séries de polynomes de Tchébychef–Laguerre // Изв. Импер. АН. VI сер. 1916. Т. 10. С. 719–738.
28. *Стекловъ В.А.* О приближенномъ вычисленiи опредѣленныхъ интеграловъ при помощи формулъ механическихъ квадратуръ: Остаточный членъ формулъ механическихъ квадратуръ. (Сообщенiе второе) // Изв. Импер. АН. VI сер. 1916. Т. 10. С. 829–850.
29. *Stekloff W.A.* Sur l'approximation des fonctions à l'aide des polynomes de Tchébychef et sur les quadratures. I, II, III // Изв. АН. 1917. Т. 11. С. 187–218, 535–566, 687–718.
30. *Stekloff W.* Remarques sur les quadratures // Изв. РАН. VI сер. 1918. Т. 12. С. 99–118.
31. *Stekloff W.* Quelques remarques complémentaires sur les quadratures // Изв. РАН. VI сер. 1918. Т. 12. С. 587–614.
32. *Stekloff W.* Sur les quadratures. II // Изв. РАН. VI сер. 1919. Т. 13. С. 65–96.
33. *Stekloff W.* Sur le développement des fonctions continues en séries de polynomes de Tchébychef // Изв. РАН. VI сер. 1921. Т. 15. С. 249–266.
34. *Stekloff W.* Une contribution nouvelle au problème du développement des fonctions arbitraires en séries de polynomes de Tchébychef // Изв. РАН. VI сер. 1921. Т. 15. С. 267–280.
35. *Stekloff W.* Une méthode de la solution du problème de développement des fonctions en séries de polynomes de Tchébychef indépendante de la théorie de fermeture. I, II // Изв. РАН. VI сер. 1921. Т. 15. С. 281–302, 303–326.
36. *Stekloff W.* Sopra la teoria delle quadrature dette meccaniche // Rend. Accad. Lincei. 1923. V. 32, N 1. P. 320–326.
37. *Steklov V.* Sur le problème d'approximation des fonctions arbitraires à l'aide des polynomes de Tchébychef // Изв. АН СССР. VI сер. 1926. Т. 20. С. 857–862.
38. *Stekloff W.* Théorie de fermeture et le problème de représentation approchée des fonctions continues à l'aide de polynomes de Tchébychef // Acta math. 1927. V. 49. P. 263–299.
39. *Stekloff W.* Sur les problèmes de représentation des fonctions à l'aide de polynomes, du calcul approché des intégrales définies, du développement des fonctions en séries infinies suivant les polynomes et de l'interpolation, considérés au point de vue des idées de Tchébycheff // Proc. Int. Math. Congr., Toronto, 1924. Toronto: Univ. Toronto Press, 1928. V. 1. P. 631–640.
40. *Суетин П.К.* Проблема В.А. Стеклова в теории ортогональных многочленов // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1977. Т. 15. С. 5–82. (Итоги науки и техники).
41. *Szegő G.* Orthogonal polynomials. 4th ed. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1975. (AMS Colloq. Publ.; V. 23).