Théorème C. *Pour toute fonction $F(x)$, l'ensemble A des points où* $\lim\limits_{h\to 0+} |F(x+h)-F(x)|/h = \infty$ *est de mesure nulle.*

Car, en chacun de ses points, l'ensemble $\mathrm{T}(F; A)$ possède une tangente extrême parallèle à l'axe des y.

(Supplément à l'épreuve de tirage). M. F. Roger a bien voulu m'envoyer ses Notes de C. R. 201 (1935), p. 871 et 202 (1936), p. 377 où il annonce des théorèmes à peu près équivalents aux miens et leur extension sur les espaces n-dimensionnels. Or, les méthodes employées plus haut conduisent aussi à cette extension. En nous bornant p. ex. à l'espace à 3 dimensions, appelons *plan tangent médian de E en a* tout plan α passant par $a \epsilon E$ et tel que chaque demi-droite située sur α et issue de a est une demi-tangente médiane de E en a. Les définitions du *côté vide* d'un plan tangent médian, du *plan tangent extrême* et du *plan tangent unique* sont alors évidentes et on a l'extension suivante du lemme du § 2:

R désignant un ensemble dans l'espace à 3 dimensions et P un ensemble des points $a \epsilon R$ où $\mathrm{contg}_R\, a$ *ne contient pas la demi-droite* $\hat{a}(\pi/2)$, 1° *dans tout point de P, à un ensemble de longueur nulle près, un plan tangent extrême à R existe, la demi-droite $\hat{a}(\pi/2)$ étant située du côté vide de ce plan* 2° *l'ensemble P est contenu dans la somme d'une suite d'ensembles* $\mathrm{T}(F_n; Q_n)$ *où Q_n sont des ensembles fermés dans le plan xy et les fonctions $F_n(x, y)$ satisfont sur eux à la condition de Lipschitz.*

La marche de la démonstration est analogue à celle du lemme du § 2, en tenant compte du th. connu de M. Rademacher sur l'existence d'une différentielle totale. On en tire l'extension suivante du th. 1 du § 2:

L'ensemble P des points a de R où $\mathrm{contg}_R\, a$ *n'est pas l'espace entier est somme d'une suite d'ensembles fermés de surface finie. De plus, en tout point a de P, excepté au plus un sous-ensemble de surface nulle,* $\mathrm{contg}_R\, a$ *est soit un demi-espace, soit un plan tangent unique.*

On en déduit les extensions des th. A et B du § 4, qui embrassent les généralisations connues du th. de M. Rademacher. Enfin, par l'extension directe du th. 2, on montre que *P désignant l'ensemble des points de R où il existe un plan tangent extrême à R, parallèle à une droite D, la projection orthogonale de P sur le plan perpendiculaire à D est de surface nulle.*

Summen von $\aleph_1$ Mengen.

Von

F. Hausdorff (Bonn).

Ein metrischer separabler Raum X sei als Summe von $\aleph_1$ wachsenden Borelschen Mengen X^ξ $(\xi < \Omega)$ dargestellt:

$$(1) \qquad X = \sum_\xi X^\xi, \qquad X^0 \subset X^1 \subset \ldots \subset X^\xi \subset \ldots$$

Es sei

$$(2) \qquad T^\xi = X - X^\xi$$

das Komplement von X^ξ, also

$$0 = \prod_\xi T^\xi, \qquad T^0 \supset T^1 \supset \ldots \supset T^\xi \supset \ldots$$

Die Summe (1) heisse

k-konvergent (der Kategorie nach konvergent), wenn schliesslich (für $\xi \geqq \alpha$) T^ξ von 1. Kategorie in X ist,

m-konvergent (dem Masse nach konvergent), wenn für *jede* absolut additive, endliche, nichtnegative Massfunktion $|A|$, die mindestens für die Borelschen Mengen $\subset X$ (auch für X selbst) definiert ist, schliesslich $|T^\xi| = 0$ ist.

Beide Eigenschaften sind trivial, wenn schliesslich $T^\xi = 0$ ist. Wir nennen die Summe (1) *unabzählbar*, wenn stets $T^\xi \neq 0$, $X^\xi \neq X$ ist; sie lässt sich dann durch Übergang zu einer Teilfolge in eine Summe mit paarweise verschiedenen Summanden X^ξ verwandeln.

Wenn insbesondere

$$(3) \qquad T^\xi = \sum_n T_n^\xi,$$

wo der Index n eine abzählbare Menge N durchläuft, die T_n^ξ Borelsche Mengen und für jedes n die Mengen

$$(4) \qquad T_n^0, \; T_n^1, \; \ldots, \; T_n^\xi, \ldots$$

disjunkt sind, so ist (1) k-konvergent und m-konvergent. Denn die Mengen (4) sind schliesslich (für $\xi \geqq \alpha_n$) von 1. Kategorie [1]) resp. vom Mass 0 und bei hinreichend grossem α und $\xi \geqq \alpha$ gilt dies für alle n gleichzeitig.

Statt (3) (4) kann man schreiben (z. B. mit $F_n^\xi = X - \sum_{\alpha<\xi} T_n^\alpha$)

$$T^\xi = \sum_n (F_n^\xi - F_n^{\xi+1}), \tag{5}$$

wo die F_n^ξ Borelsche Mengen sind und für jedes n

$$F_n^0 \supset F_n^1 \supset \ldots \supset F_n^\xi \supset \ldots \tag{6}$$

gilt. Hierunter subsumieren sich die „Lusin-Sierpińskischen" Raumzerlegungen, die aus einer analytischen Menge $A \subset X$ oder, genauer gesagt, aus einem „determinierenden System" Borelscher Mengen entspringen, das den Raumpunkten in bekannter Weise „Indizes" $< \Omega$ zuordnet [2]); X^ξ ist die Menge der Punkte mit Indizes $\leqq \xi$. Das gibt also stets k-konvergente und m-konvergente Summen.

Im Folgenden will ich (§ 1) zeigen, dass ein separabler vollständiger unabzählbarer Raum X als Summe wachsender, verschiedener Mengen $X^\xi = G_\delta$ dargestellt werden kann, sowie (§ 2) die Zerlegung des Raumes 2^X der abgeschlossenen Mengen A des kompakten Raumes X nach dem Index der ersten perfekten Ableitung von A untersuchen; in beiden Fällen ergeben sich wiederum k-konvergente und m-konvergente Summen.

Herr Sierpiński hat schon vor langer Zeit (Fund. Math. 1 (1920), p. 224, problème 6) die — natürlich ohne Kontinuumhypothese zu beantwortenden — Fragen gestellt:

(A) Kann eine Summe von $\aleph_1$ Mengen 1. Kategorie von 2. Kategorie sein?

(B) Kann eine Summe von $\aleph_1$ Nullmengen von positivem äusserem Masse sein?

---

[1]) Der Schluss auf die Kategorie gilt bereits, wenn die T_n^ξ der Baireschen Bedingung in Bezug auf den Raum X genügen (Kuratowski, *Topologie* I (1933), p. 265) oder, wie wir sagen wollen, β-Mengen sind. Eine β-Menge Z ist mit einer Borelschen Menge Y bis auf Mengen 1. Kategorie identisch, d. h. die Menge $(Z-Y)+(Y-Z)$ ist von 1. Kategorie, wobei man Y als offen oder abgeschlossen oder als $G_\delta \subset Z$ oder als $F_\sigma \supset Z$ annehmen darf.

[2]) Lusin-Sierpiński, C. R. 175 (1922), p. 357—359 und Journ. de Math. (7) 2 (1923), p. 53—72, insbesondere p. 61. Sierpiński, Fund. Math. 8 (1926), p. 362—369 und Fund. Math. 21 (1933), p. 29—34. Sélivanowski, Fund. Math. 21 (1933), p. 20—28.

Die Bejahung dieser Fragen würde k-divergente resp. m-divergente Darstellungen (1) liefern. Die Tatsache, dass die bisher bekannten, ohne Kontinuumhypothese definierbaren Darstellungen alle k-konvergent und m-konvergent sind, beleuchtet die Schwierigkeit der beiden Sierpińskischen Probleme.

§ 1.

Unter den dyadischen Zifferfolgen

$$a \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \qquad (a_n = 0 \text{ oder } 1)$$

definieren wir, wie üblich, eine „finale" Ordnung durch die Vorschriften:

$[a \leqq b] = [b \geqq a]$ heisst: es ist *schliesslich* (für $n \geqq k$) $a_n \leqq b_n$.

Die kleinste natürliche Zahl k, die das leistet, werde mit $(a\,b)$ bezeichnet. Ist $a \leqq x$, $x \leqq b$, so ist auch $a \leqq b$ und

$$(a\,b) \leqq \max\,[(a\,x), (x\,b)]. \tag{7}$$

Sei $\varrho = [a \leqq b]$, $\sigma = [a \geqq b]$ und ϱ', σ' die Negationen dieser Behauptungen (ϱ' heisst, dass unendlich oft $a_n > b_n$ ist). Wir haben dann vier mögliche Fälle:

$$[a = b] = \varrho\,\sigma$$
$$[a < b] = \varrho\,\sigma'$$
$$[a > b] = \varrho'\,\sigma$$
$$[a \parallel b] = \varrho'\,\sigma'.$$

Im vierten Fall heissen a, b unvergleichbar, in den drei ersten vergleichbar. Mit $a < x$, $x < b$ ist $a < b$. Die finale Gleichheit $a = b$ bedeutet, dass schliesslich $a_n = b_n$; völlige Identität $a \equiv b$, dass stets $a_n = b_n$.

Die mit a final gleichen $x = a$ bilden eine abzählbare Klasse $K(a)$. Eine Menge A von paarweise vergleichbaren Folgen, die aus jeder Klasse $K(a)$ höchstens ein Element enthält, ist im gewöhnlichen Sinn eine geordnete Menge.

Unter $A < B$ wird natürlich verstanden, dass für $a \in A$, $b \in B$ stets $a < b$.

Unsere Absicht ist, eine $\Omega\Omega^*$-Lücke

$$a^0 < a^1 < \ldots < a^\xi < \ldots \mid \ldots < b^\xi < \ldots < b^1 < b^0,$$

d. h. zwei geordnete Mengen $A < B$ von den Typen Ω, Ω^* derart zu konstruieren, dass es kein x mit $A < x < B$ gibt [1]).

Erster Einschaltungssatz. *Sind $A<B$ zwei geordnete, höchstens abzählbare Mengen von Folgen, so gibt es eine Folge x mit $A<x<B$.*

Vorausbemerkt sei, dass ohne die Annahme *geordneter* A, B die Behauptung nicht zu gelten braucht. Wenn z. B. A aus den beiden Folgen $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ und $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$, B aus der einen Folge $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ besteht, so gibt es kein x mit $A < x < B$.

Beweis. Es genügt, $A' < x < B'$ nachzuweisen, wo $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ und A mit A' konfinal (d. h. kein $a \in A - A'$ mit $a > A'$ existiert) und B mit B' koinitial ist, also kann man A vom Typus 1 oder ω, B vom Typus 1 oder ω^* annehmen. Alle diese vier Fälle werden gemeinsam bewiesen, indem man zeigt: ist

$$a \leqq b \leqq c \leqq \ldots < \ldots \leqq r \leqq q \leqq p,$$

so lässt sich ein x einschalten $(a < x < p,\ b < x < q,\ c < x < r, \ldots)$. Nun kann man die Folge N der natürlichen Zahlen in disjunkte, endliche, wie ihre Indizes geordnete Intervalle

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \ldots$$

so zerlegen:

In $N_1 + N_2$ ist $a_n \leqq p_n$, aber in N_1 und in N_2 mindestens einmal $a_n < p_n$.

In $N_3 + N_4$ ist $a_n \leqq b_n \leqq q_n \leqq p_n$, aber in N_3 und in N_4 mindestens einmal $b_n < q_n$.

In $N_5 + N_6$ ist $a_n \leqq b_n \leqq c_n \leqq r_n \leqq q_n \leqq b_n$, aber in N_5 und in N_6 mindestens einmal $c_n < r_n$. U. s. w.

Wir lassen x in $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, \ldots$ mit $a, p, b, q, c, r, \ldots$ übereinstimmen ($x_n = a_n$ für $n \in N_1$ u. s. w.). Dann ist $a_n \leqq x_n \leqq p_n$ in $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \ldots$, während in $N_1 + N_3 + \ldots$ unendlich oft $x_n < p_n$, in $N_2 + N_4 + \ldots$ unendlich oft $x_n > a_n$ gilt; also $a < x < p$. Genau so zeigt sich $b < x < q$, $c < x < r$, ... Q. E. D.

---

[1]) Für Folgen reeller oder rationaler Zahlen habe ich dies bereits 1909 gemacht (*Die Graduierung nach dem Endverlauf*, Abh. Sächs. Ges. d. Wiss. 31). Da diese Arbeit wohl wenig bekannt ist und die Konstruktion für dyadische Folgen, die zum vollen Beweis des Satzes I erforderlich ist, doch einige Modifikationen verlangt, möchte ich die Sache vollständig darstellen.

Es sei nun $A < b$. Auf Grund der oben erklärten Indizes $(a\, b)$ unterscheiden wir zwei Fälle:

(γ) b liegt *nahe* an A, kurz $A \gamma b$, wenn es für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$ in A nur endlich viele a mit $(a\, b) \leqq k$ gibt.

(δ) b liegt *fern* von A, kurz $A \delta b$, wenn es für ein k in A unendlich viele a mit $(a\, b) \leqq k$ gibt.

Ist A endlich, so ist $A \gamma b$; ist A unabzählbar, so $A \delta b$; bei abzählbarem A kann jeder der beiden Fälle eintreten.

(8) Ist $A < x < b$ und b nahe an A, so liegt auch x nahe an A.

Denn liegt x fern von A, sodass es unendlich viele $a \in A$ mit $(a\, x) \leqq k$ gibt, so ist für diese a nach (7)

$$(a\, b) \leqq \max\, [k, (x\, b)] = l$$

und b liegt fern von A.

Zweiter Einschaltungssatz. *Es sei A eine geordnete abzählbare Menge von Folgen, $A < y$, und für jeden Abschnitt $A(a)$ von A sei $A(a) \gamma y$. Dann gibt es ein x mit $A < x < y$, $A \gamma x$.*

($A(a)$ ist die Menge der vor a liegenden Elemente von A).

Beweis. Zunächst sei A vom Typus ω, $A = \{a, b, c, \ldots\}$, $a < b < c < \ldots < y$. Wir können die Menge der natürlichen Zahlen in

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots$$

so zerlegen:

In N_1 ist $a_n \leqq b_n \leqq y_n$, mindestens einmal $a_n < b_n$ und mindestens einmal $b_n < y_n$.

In N_2 ist $a_n \leqq b_n \leqq c_n \leqq y_n$, mindestens einmal $b_n < c_n$ und mindestens einmal $c_n < y_n$. U. s. w.

Wir lassen x in $N_1, N_2, N_3, \ldots$ mit $a, b, c, \ldots$ übereinstimmen. In $N_1 + N_2 + \ldots$ ist $a_n \leqq x_n \leqq y_n$, also $a \leqq x \leqq y$, ebenso ist $b \leqq x \leqq y, \ldots$, also $A < x \leqq y$ und zwar $x < y$, da sich in jedem $N_1, N_2, \ldots$ eine Stelle mit $x_n < y_n$ findet. Andererseits ist in N_1 eine Stelle mit $x_n = a_n < b_n$, in N_2 eine mit $x_n = b_n < c_n$ u. s. w., sodass die Indizes $(b\, x)$, $(c\, x)$, ... nach ∞ streben müssen, d. h. $A \gamma x$.

Im allgemeinen Fall können wir $A\,\delta\,y$ annehmen, da bei $A\,\gamma\,y$ *jedes* zwischen A und y eingeschaltete Element x ebenfalls nahe an A läge, und A ohne letztes Element voraussetzen, denn wenn a das letzte Element von A wäre, so würde aus $A(a)\,\gamma\,y$ ohne weiteres auch $A\,\gamma\,y$ folgen. Die Menge A^k der $a \epsilon A$ mit $(a\,y) \leqq k$ ist für genügend grosses $k\,(\geqq h)$ unendlich; da aber in jedem Abschnitt $A(a)$ nur endlich viele Elemente von A^k liegen, so ist (wie man durch Betrachtung einer mit A konfinalen ω-Folge $a^0 < a^1 < \ldots$ erkennt) A^k vom Typus ω und mit A konfinal. Auf Grund des bereits bewiesenen können wir dann dyadische Folgen $y^h, y^{h+1}, \ldots$ bilden derart, dass

$$A < \ldots < y^{h+2} < y^{h+1} < y^h < y, \qquad A^k\,\gamma\,y^k.$$

Denn zwischen $A^h(\subset A) < y$ lässt sich, weil A^h vom Typus ω ist, ein y^h mit $A^h < y^h < y$, $A^h\,\gamma\,y^h$ einschalten; sodann ist, weil A mit A^h konfinal ist, auch $A < y^h$, $A^{h+1} < y^h$ und es lässt sich ein y^{h+1} mit $A^{h+1} < y^{h+1} < y^h$, $A^{h+1}\,\gamma\,y^{h+1}$ einschalten, u. s. f. Nun werde zwischen A und $B = \{y, y^h, y^{h+1}, \ldots\}$ ein x eingeschaltet: $A < x < B$. Dann ist $A\,\gamma\,x$; denn gäbe es in A unendlich viele a mit $(a\,x) \leqq l$, so wäre für diese auch $(a\,y) \leqq \max[l, (x\,y)] = k$, diese a würden also zu $A^k (k \geqq h)$ gehören und es wäre $A^k\,\delta\,x$, im Widerspruch zu $A^k < x < y^k$, $A^k\,\gamma\,y^k$. Damit ist der zweite Einschaltungssatz bewiesen.

Nunmehr können wir eine Menge $A = \{a^0, a^1, \ldots, a^\xi, \ldots\}$ vom Typus Ω und eine Menge $B = \{b^0, b^1, \ldots, b^\xi, \ldots\}$ vom Typus Ω^* gemäss der Bedingung $A < B$ und

(9) $$A^\eta\,\gamma\,b^\eta$$

konstruieren, wo $A^\eta = \{a^0, \ldots, a^\xi, \ldots\}$ $(\xi < \eta)$ der η. Abschnitt von A (vom Typus η) ist; entsprechend sei $B^\eta = \{b^0, \ldots, b^\xi, \ldots\}\,(\xi < \eta)$ vom Typus η^*. Wir beginnen mit einem beliebigen Paar $a^0 < b^0$ und zeigen dann, dass sich für $\eta > 0$ das Paar a^η, b^η passend bestimmen lässt, falls alle Paare a^ξ, b^ξ für $\xi < \eta$ passend bestimmt sind, d. h. falls $A^\eta < B^\eta$ und für $\xi < \eta$ $A^\xi\,\gamma\,b^\xi$ ist. Zunächst schalten wir ein beliebiges y ein: $A^\eta < y < B^\eta$. Für jeden Abschnitt A^ξ von A^η $(\xi < \eta)$ ist dann $A^\xi\,\gamma\,y$, weil $A^\xi < y < b^\xi$, $A^\xi\,\gamma\,b^\xi$. Nach dem zweiten Einschaltungssatz gibt es ein b^η mit $A^\eta < b^\eta < y$, $A^\eta\,\gamma\,b^\eta$, und wenn wir dann noch ein a^η mit $A^\eta < a^\eta < b^\eta$ einschalten, so ist $A^\eta < a^\eta < b^\eta < B^\eta$ und (9) erfüllt.

Die so konstruierten Mengen A, B geben dann die gesuchte $\Omega\,\Omega^*$-Lücke. Denn wäre $A < x < B$, so gäbe es mindestens ein k

derart, dass unabzählbar viele a^ξ mit $(a^\xi\,x) \leqq k$ vorhanden wären; ist dann η so gross, dass der Abschnitt A^η unendlich viele dieser a^ξ enthält, so wäre $A^\eta\,\delta\,x$ im Widerspruch zu $A^\eta < x < b^\eta$ und (9).

Leider ist die Existenz der $\Omega\,\Omega^*$-Lücken die bisher einzige, ohne Kontinuumhypothese herstellbare Verbindung der zweiten Zahlenklasse mit den Problemen der finalen Ordnung. Es ist nicht bekannt, ob von zwei geordneten Mengen $A < B$, zwischen die sich kein x einschalten lässt, die eine von der Mächtigkeit $\aleph_1$ und die andere höchstens abzählbar sein kann, z. B. ob $a^0 \lessdot a^1 < \ldots \lessdot a^\xi < \ldots < b$ und $b = \lim a^\xi$ in dem Sinne sein kann, dass kein x mit $A < x < b$ existiert, oder gar in dem schärferen Sinne, dass zu jedem $x < b$ ein $a^\xi > x$ vorhanden ist.

Wir machen nun die Menge der dyadischen Folgen $x = (x_1, x_2, \ldots)$ zum topologischen Raum C, in dem die Mengen $(a_1, \ldots, a_k)$ (das ist die Menge der $x = (a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots)$ mit vorgeschriebenen k Anfangsziffern) eine Basis der offenen Mengen bilden; diese Basismengen sind zugleich abgeschlossen. C lässt sich zu einem kompakten Raum metrisieren, z. B. zum Baireschen Raum, indem man die Entfernung zwischen x und $y \neq x$ als $\frac{1}{k}$ definiert, falls x und y sich zuerst in der k. Ziffer unterscheiden, oder zu der bekannten Cantorschen Menge, indem man x mit der reellen Zahl $2\sum\limits_n \frac{x_n}{3^n}$ identifiziert.

Für $a, b \epsilon C$ ist

(10) $$F_n = \mathop{\mathrm{E}}_x [a_n \leqq x_n \leqq b_n]$$

abgeschlossen und

(11) $$T = \mathop{\mathrm{E}}_x [a \leqq x \leqq b] = \underline{\lim}\, F_n = \sum_n F_n F_{n+1} F_{n+2} \ldots$$

ein F_σ. Unsere $\Omega\,\Omega^*$-Lücke liefert uns also in den Mengen

$$T^\xi = \mathop{\mathrm{E}}_x [a^\xi \leqq x \leqq b^\xi]$$

eine Folge abnehmender, wegen $a^\xi \epsilon T^\xi - T^{\xi+1}$ verschiedener F_σ-Mengen mit $\prod\limits_\xi T^\xi = 0$, und wir erhalten den Satz:

I. *Jeder separable, vollständige, unabzählbare Raum X lässt sich als Summe $\sum_\xi X^\xi$ wachsender, verschiedener Mengen $X^\xi = G_\delta$ darstellen.*

Denn X enthält C (topologisch) als kompakte, demnach abgeschlossene Menge, die T^ξ sind F_σ auch in X und die $X^\xi = X - T^\xi$ sind G_δ in X [1]).

Wir wollen nun noch zeigen, dass die auf dem angegebenen Wege erhaltene Darstellung $X = \sum_\xi X^\xi$ k-konvergent und m-konvergent ist. Die erste Behauptung ist trivial, da eine abzählbare, in C dichte Menge schliesslich in $C - T^\xi$ enthalten, also T^ξ als F_σ mit dichtem Komplement schon in C und erst recht in X von 1. Kategorie ist. In unserem Fall sind übrigens alle X^ξ (vielleicht bis auf $X^0 = 0$) und T^ξ in X dicht.

Weiter sei $|A|$ ein Mass mit den p. 241 angegebenen Eigenschaften; es genügt übrigens, dass es mindestens für die Borelschen Mengen $\subset C$ definiert und $|T^\xi|$ schliesslich endlich sei; wir wollen zeigen, dass schliesslich $|T^\xi| = 0$ sein muss. Wäre stets $|T^\xi| > 0$, so wären diese Zahlen schliesslich konstant, etwa $=1$, und mit Weglassung abzählbar vieler Anfangsglieder können wir $|T^0| = |T^1| = \ldots = |T^\xi| = \ldots = 1$ annehmen. Die in T^0 abgeschlossenen und offenen Intervalle $T^0 \mathop{\mathrm{E}}_x [x_n = \delta] = \binom{\delta}{n}$, wo $\delta = 0$ oder 1, mögen die Masse $\left|\begin{matrix}\delta\\ n\end{matrix}\right|$ haben, wobei $\left|\begin{matrix}0\\ n\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}1\\ n\end{matrix}\right| = 1$. Nun sei $a^0 < a < b < b^0$, also mit den Bezeichnungen (10) (11) $T \subset T^0$ und $T = \underline{\lim}\, T^0 F_n$; also $|T| \leqq \underline{\lim}\, |T^0 F_n|$ und, falls $|T| = 1$, $\lim |T^0 F_n| = 1$. Da $(0, 0, 0, \ldots) < a < b < (1, 1, 1, \ldots)$, gibt es unendlich viele p (deren Menge P sei) mit $a_p = b_p$, also $F_p = \mathop{\mathrm{E}}_x [x_p = a_p]$ und $T^0 F_p = \binom{a_p}{p}$; es ist also $\lim \left|\begin{matrix}a_p\\ p\end{matrix}\right| = 1$. Wenn nun $x \in C - T$ (nicht notwendig $x \in T^0$), so gibt es eine unendliche Menge $Q \subset P$, für deren Elemente $q \in Q$ $x_q = 1 - a_q$; denn die Ungleichungen $a_q \leqq x_q \leqq b_q$ sind unendlich oft nicht erfüllt, sondern also (wenn man $q \geqq (a\, b)$ annimmt) entweder $x_q < a_q = b_q$ oder $x_q > b_q = a_q$.

[1]) Mit der Lückenkonstruktion für Folgen rationaler Zahlen würde man Mengen T^ξ erhalten, die im Raum J der irrationalen Zahlen zwar F_σ, in einem J topologisch enthaltenden Raum X aber nur von der Form $G_\delta \cdot F_\sigma$ sind (vgl. die Anmerkung p. 244).

Aus $\lim \left|\begin{matrix}a_q\\ q\end{matrix}\right| = 1$ folgt also $\lim \left|\begin{matrix}x_q\\ q\end{matrix}\right| = 0$, jedenfalls also $\underline{\lim} \left|\begin{matrix}x_n\\ n\end{matrix}\right| = 0$. Diese letzte Beziehung müsste nun für *jede* Folge $x \in C$ gelten, da wegen $\prod_\xi T^\xi = 0$ gewiss ein T^ξ mit $x \in C - T^\xi$ existiert, und damit ist ein Widerspruch erzielt, denn wenn wir für jedes n $\binom{x_n}{n}$ als dasjenige der beiden Intervalle $\binom{0}{n}, \binom{1}{n}$ wählen, welches das grösste Mass hat, so erhalten wir eine Folge $x = (x_1, x_2, \ldots)$ mit $\underline{\lim} \left|\begin{matrix}x_n\\ n\end{matrix}\right| \geqq \frac{1}{2}$. Die hier gegebene Darstellung (1) ist also m-konvergent.

Dieser Beweis für m-Konvergenz gilt übrigens für *jede* $\Omega\Omega^*$-Lücke; bei unserer speziellen Konstruktion kann man noch einen anderen geben. Es sei $(k = 1, 2, 3, \ldots)$

$$T_k^\xi = \mathop{\mathrm{E}}_x \prod_{n \geqq k} [a_n^\xi \leqq x_n \leqq b_n^\xi],$$

also $T^\xi = \sum_k T_k^\xi$. Für $\xi < \eta$ folgt nun aus $T_k^\xi T_k^\eta \neq 0$ jedenfalls $\prod_{n \geqq k} [a_n^\xi \leqq b_n^\eta]$, also $(a^\xi b^\eta) \leqq k$; bei gegebenem η kann dies nach (9) nur für endlich viele ξ gelten. Ist demnach $(l = 1, 2, 3, \ldots)$ T_{kl}^ξ die Menge der x, die zu *genau* l Mengen $T_k^{\xi_1}, \ldots, T_k^{\xi_l}$ mit $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{l-1} < \xi_l = \xi$ gehören, so ist $T_k^\xi = \sum_l T_{kl}^\xi$ und offenbar $T_{kl}^\xi T_{kl}^\eta = 0$ für $\xi < \eta$. Die T_{kl}^ξ sind Borelsch, denn $\sum_{m \geqq l} T_{km}^\xi$ ist die Menge der x, die zu *mindestens* l Mengen $T_k^{\xi_1}, \ldots, T_k^{\xi_l}$ mit $\xi_1 < \ldots < \xi_{l-1} < \xi_l = \xi$ gehören, also gleich der Summe der Durchschnitte $T_k^{\xi_1} \ldots T_k^{\xi_l}$ oder ein F_σ; T_{kl}^ξ ist Differenz zweier F_σ. Wir haben also $T^\xi = \sum_{kl} T_{kl}^\xi$ und für jedes Zahlenpaar k, l sind die Mengen $T_{kl}^0, T_{kl}^1, \ldots, T_{kl}^\xi, \ldots$ disjunkt; es liegt demnach der Fall (3) (4) vor, der die m-Konvergenz verbürgt.

Wenn die Sierpińskische Frage (B) zu bejahen ist und also in einem abgeschlossenen Würfel eines Euklidischen Raumes eine Menge $A = \sum_\xi A^\xi$ von positivem äusseren (Lebesgueschen) Mass existiert, die Summe von $\aleph_1$ Nullmengen A^ξ ist, so kann man (da jede Menge vom Masse 0 in ein G_δ vom Masse 0 eingeschlossen werden kann) die A^ξ als wachsende G_δ annehmen. *Falls A von positivem inneren Mass ist* und also ein perfektes X mit $|X| > 0$ enthält, so ist

$X = \sum_\xi X A^\xi = \sum_\xi X^\xi$ mit $X^\xi \neq X$ und man erhält einen separablen, vollständigen, unabzählbaren Raum X wie im Satz I als eine unabzählbare Summe wachsender G_δ, die aber in diesem Falle m-divergent ist.

Der Satz I regt das Problem an:

(P) *Lässt sich ein separabler, vollständiger, unabzählbarer Raum X als Summe $\sum_\xi X^\xi$ wachsender, verschiedener Mengen $X^\xi = F_\sigma$ darstellen?*

Die Bejahung dieser Frage würde das Sierpińskische Problem (A) in bejahendem Sinne lösen. Denn die $T^\xi = X - X^\xi$ sind abnehmende, verschiedene Mengen G_δ; ist $F^\xi = \overline{T^\xi}$ die abgeschlossene Hülle von T^ξ, so ist T^ξ in F^ξ dicht, $F^\xi - T^\xi = F^\xi X^\xi$ in F^ξ von 1. Kategorie. Die abnehmenden F^ξ werden schliesslich gleich, $F^\xi = F \neq 0$, und dann ist $F = \sum_\xi F X^\xi$ als Summe von $\aleph_1$ Mengen 1. Kategorie in F dargestellt, während F in sich selbst von 2. Kategorie ist.

Wenn umgekehrt (A) zu bejahen und also in einem separablen Raum E, den wir alsbald als vollständig annehmen können, eine Menge $A = \sum_\xi A^\xi$ von 2. Kategorie existiert, die Summe von $\aleph_1$ Mengen A^ξ erster Kategorie ist, so kann man (da jede Menge 1. Kategorie in ein F_σ von 1. Kategorie eingeschlossen werden kann) die A^ξ als wachsende F_σ annehmen. *Falls A von zweiter innerer Kategorie ist*, will sagen, falls A ein X enthält, das ein G_δ und von 2. Kategorie (in E) ist, so ist $X = \sum_\xi X A^\xi = \sum_\xi X^\xi$ mit $X^\xi \neq X$ und man erhält also eine Darstellung des topologisch vollständigen Raumes X als unabzählbare Summe wachsender Mengen $X^\xi = X F_\sigma$, d. h. die Frage (P) ist zu bejahen.

Zur Erläuterung der soeben eingeführten „inneren Kategorie", die ein Analogon des inneren Masses ist, sei noch Folgendes bemerkt. $k(A)$ $(=1, 2)$ sei die Kategorie von A im Raum E und die innere Kategorie $k_i(A)$ das Maximum von $k(Y)$ für die Borelschen Mengen $Y \subset A$. (Eine entsprechend definierte äussere Kategorie $= \min k(Y)$ für $Y \supset A$ fällt mit $k(A)$ zusammen, da jedes A von 1. Kategorie in einem F_σ von 1. Kategorie enthalten ist). Hierbei kann man die Y sowohl durch die $X = G_\delta$ als auch durch die β-Mengen Z (die die Bairesche Bedingung bezüglich E erfüllen) ersetzen, da jedes Z ein X mit $k(Z - X) = 1$, also $k(X) = k(Z)$ enthält; für die β-Mengen ist $k(Z) = k_i(Z)$. Ist E separabel und vollständig, P sein perfekter Kern und der offene Kern $\underline{P}$ von P nicht leer, also $k(P) = 2$, so gibt es Mengen A mit $k(A) > k_i(A)$. Denn man kann P genau wie beim Bernsteinschen Existenzbeweis für total imperfekte Mengen in zwei disjunkte Mengen A, B zerlegen, die beide mit jedem unabzählbaren $G_\delta \subset P$ gemeinsame Punkte haben; jedes $G_\delta \subset A$ ist dann höchstens abzählbar, also von 1. Kategorie; $k_i(A) = k_i(B) = 1$. Wäre $k(A) = 1$, so wären A und $B = P - A$ β-Mengen, also beide von 1. Kategorie, demnach ist $k(A) = k(B) = 2$. Im gegenwärtigen Fall gibt es anderseits auch Mengen, die keine β-Mengen sind und doch $k = k_i\ (=2)$ haben; ist z. B. $P = P_1 + P_2$ eine Zerspaltung von P in zwei Borelsche Mengen, die innere Punkte haben, so können $A P_1$, $A P_2$ nicht beide β-Mengen sein; ist etwa $A P_1$ keine, so ist $A P_1 + P_2$ eine Menge der verlangten Beschaffenheit. Für $\underline{P} = 0$ dagegen sind alle Mengen $A \subset E$ β-Mengen und $k(A) = k_i(A)$.

§ 2.

X sei ein metrischer kompakter Raum mit den Entfernungen $\varrho(a, b)$, $\mathfrak{X} = 2^X$ der ebenfalls kompakte Raum der abgeschlossenen Mengen $A \subset X$, $A \neq 0$ mit der bekannten Entfernungsdefinition $\varrho(A, B)$, von der wir nur die charakteristische Eigenschaft in Erinnerung bringen: $\varrho(A, B) \leqq \delta$ bedeutet, dass zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ und umgekehrt zu jedem b ein a mit $\varrho(a, b) \leqq \delta$ existiert. Grosse lateinische Buchstaben bedeuten Mengen $\subset X$, grosse deutsche bedeuten Mengen $\subset \mathfrak{X}$; $|M|$ bezeichne jetzt die *Mächtigkeit* von M. A bedeutet immer abgeschlossene Mengen $\neq 0$, also $A \in \mathfrak{X}$.

Es sei $(\xi < \Omega)$ A^ξ die ξ. Ableitung von A und

$$\mathfrak{X}^\xi = \mathop{\mathrm{E}}_A [A^\xi = A^{\xi+1}]$$

die Menge der A, deren ξ. Ableitung perfekt (eventuell 0) ist,

$$\mathfrak{T}^\xi = \mathfrak{X} - \mathfrak{X}^\xi = \mathop{\mathrm{E}}_A [A^\xi \neq A^{\xi+1}]$$

das Komplement von $\mathfrak{X}^\xi$. Wir haben

$$\mathfrak{X} = \sum_\xi \mathfrak{X}^\xi, \quad \mathfrak{X}^0 \subset \mathfrak{X}^1 \subset \ldots \subset \mathfrak{X}^\xi \subset \ldots \tag{12}$$

und wollen zeigen:

II. *Die $\mathfrak{X}^\xi$ sind Borelsche Mengen; die Summe* (12) *ist k-konvergent und m-konvergent.*

Ist F abgeschlossen, G offen, so gelten die Folgerungen

$$[|AF| = \infty] \to [A'F \neq 0], \quad [A'G \neq 0] \to [|AG| = \infty]$$

Stellt man eine abgeschlossene Menge $F \neq 0$ als Durchschnitt $\prod_n F_n$ abgeschlossener Mengen F_n derart dar, dass F_{n+1} im offenen Kern $\underline{F}_n$ von F_n enthalten ist (z. B. F_n = Menge der x, deren untere Entfernung $\delta(x, F)$ von F höchstens gleich $\frac{1}{n}$ ist), so gilt

$$\begin{aligned}[A'F \neq 0] &\to \prod_n [A'F_{n+1} \neq 0] \to \prod_n [A'\underline{F}_n \neq 0] \\ &\to \prod_n [|A\underline{F}_n| = \infty] \to \prod_n [|AF_n| = \infty] \\ &\to \prod_n [A'F_n \neq 0] \to [A'F \neq 0],\end{aligned}$$

also

$$(13) \qquad [A'F \neq 0] = \prod_n [|AF_n| = \infty].$$

Hiernach behaupten wir: für jedes abgeschlossene $F (\neq 0)$ und jedes ξ ist

$$(14) \qquad \mathop{\mathrm{E}}_A [A^\xi F \neq 0] \quad \text{Borelsch.}$$

Dies ist für $\xi = 0$ richtig: $\mathop{\mathrm{E}}_A [AF \neq 0]$ ist abgeschlossen.

Schluss von ξ *auf* $\xi + 1$. (14) sei richtig. $\{U_1, U_2, \ldots\}$ sei eine abzählbare Basis der offenen Mengen $\neq 0$ von X, $V_n = \overline{U}_n$ die abgeschlossene Hülle von U_n und für eine natürliche Zahl k sei

$$\mathfrak{B} = \{V_{n_1}, V_{n_2}, \ldots, V_{n_k}\}$$

ein System von k disjunkten V_n. Dann ist

$$[|A^\xi F| \geqq k] = \sum_{\mathfrak{B}} [A^\xi F V_{n_1} \neq 0] \ldots [A^\xi F V_{n_k} \neq 0]$$

die Aussage, dass $A^\xi F$ mindestens k verschiedene Punkte enthält. Da $\mathfrak{B}$ nur abzählbar viele Systeme durchläuft, ist auf Grund von (14) $\mathop{\mathrm{E}}_A [|A^\xi F| \geqq k]$ Borelsch, ebenso der Durchschnitt dieser Mengen für $k = 1, 2, \ldots$, d. h. die Menge $\mathop{\mathrm{E}}_A [|A^\xi F| = \infty]$, und nach (13) ist

$$\mathop{\mathrm{E}}_A [A^{\xi+1} F \neq 0] = \prod_n \mathop{\mathrm{E}}_A [|A^\xi F_n| = \infty]$$

Borelsch, womit (14) von ξ auf $\xi + 1$ übertragen ist.

Schluss auf eine Limeszahl η. Ist (14) für $\xi < \eta$ richtig, so ist

$$\mathop{\mathrm{E}}_A [A^\eta F \neq 0] = \prod_{\xi < \eta} \mathop{\mathrm{E}}_A [A^\xi F \neq 0]$$

Borelsch.

Hiermit ist (14) allgemein bewiesen.

Weiter ist:

$$[A^\xi \neq A^{\xi+1}] = \sum_n [A^\xi V_n \neq 0][A^{\xi+1} V_n = 0]$$

und wenn man also

$$\mathfrak{F}_n^\xi = \mathop{\mathrm{E}}_A [A^\xi V_n \neq 0]$$

setzt:

$$\mathfrak{T}^\xi = \mathop{\mathrm{E}}_A [A^\xi \neq A^{\xi+1}] = \sum_n [\mathfrak{F}_n^\xi - \mathfrak{F}_n^{\xi+1}].$$

Hiermit ist nicht nur gezeigt, dass mit den $\mathfrak{F}_n^\xi$ auch $\mathfrak{T}^\xi$ und $\mathfrak{X}^\xi$ Borelsch ist, sondern wegen

$$\mathfrak{F}_n^0 \supset \mathfrak{F}_n^1 \supset \ldots \supset \mathfrak{F}_n^\xi \supset \ldots,$$

dass hier der Fall (5)(6) eintritt und dass demnach (12) k-konvergent und m-konvergent ist.

Herr Hurewicz (Fund. Math. 15 (1930), p. 4—17) hat im Raume $\mathfrak{X}$ ein determinierendes System Φ abgeschlossener Mengen aufgestellt und damit gezeigt, dass bei unabzählbarem X die Menge der unabzählbaren A analytisch, aber nicht Borelsch ist. Ohne nähere Ausführung sei hier angegeben: wenn $\mathfrak{X}_\xi$ die Menge der A ist, deren Index (in Bezug auf das etwas zu modifizierende System Φ) $\leqq \xi$ ist, so gilt

$$\mathfrak{X}^\xi \subset \mathfrak{X}_{\omega(\xi+1)} \subset \mathfrak{X}^{\xi+2}$$

und da $\mathfrak{X} = \sum_\xi \mathfrak{X}_\xi$ eine Lusin-Sierpińskische Summe (p. 242), also k-konvergent und m-konvergent ist, so folgt (aus der zweiten der soeben angegebenen Inklusionen) dasselbe auch für $\mathfrak{X} = \sum_\xi \mathfrak{X}^\xi$, während der Borelsche Charakter der $\mathfrak{X}^\xi$ daraus nicht hervorgeht.

Bezüglich der Kategorie gilt übrigens weit mehr:

III. *In jedem Fall ist* $\mathfrak{X}-\mathfrak{X}^1$, *bei perfektem* X *bereits* $\mathfrak{X}-\mathfrak{X}^0$ *von erster Kategorie.*

Zum Beweise verstehen wir unter $\mathfrak{J}(M)$ die Menge der A, für die AM insichdicht (eventuell 0) ist. Dann gilt:

(15) Für offenes G ist $\mathfrak{J}(G)$ ein G_δ [1]).

Zunächst ist die Menge $\underset{A}{\mathrm{E}}[\,|AG|\geqq 2]$ offen. Denn wenn A ihr angehört und $a_1 \neq a_2$ zwei Punkte von AG sind, so sei $\delta < \frac{1}{2}\varrho(a_1, a_2)$ und so klein, dass die offenen Kugeln um a_1, a_2 mit Radien δ zu G gehören. Für $\varrho(A,B) < \delta$ ist dann auch $|BG| \geqq 2$, denn es gibt Punkte $b_1, b_2 \epsilon B$ mit $\varrho(a_1, b_1) < \delta$, $\varrho(a_2, b_2) < \delta$, woraus $b_1 \neq b_2$ und $b_1, b_2 \epsilon G$ folgt. Da weiter $\underset{A}{\mathrm{E}}[AG=0] = \underset{A}{\mathrm{E}}[A \subset X-G]$ abgeschlossen ist, so ist $\underset{A}{\mathrm{E}}[\,|AG| \neq 1]$ von der Form $G+F$, also jedenfalls G_δ, und da die Insichdichtheit von AG mit $\prod_n [\,|AGU_n| \neq 1]$ äquivalent ist, wo wieder die U_n eine Basis der offenen Mengen in X bilden, so ist $\mathfrak{J}(G)$ ein G_δ.

Weiter sei F abgeschlossen, $G = X - F$ offen,

$$\mathfrak{F} = \underset{A}{\mathrm{E}}[AF \neq 0], \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{X} - \mathfrak{F} = \underset{A}{\mathrm{E}}[AF = 0];$$

$\mathfrak{F}$ ist abgeschlossen, $\mathfrak{G}$ offen. Wir behaupten:

(16) Mit F ist auch $\mathfrak{F}$ nirgendsdicht.

Es ist zu zeigen, dass $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{X}$ dicht ist (es kann $F \neq 0$ angenommen werden). Sei $A \epsilon \mathfrak{X}$ beliebig; wir bilden eine endliche Menge $N \subset A$ (ein δ-Netz) mit $\varrho(A, N) < \delta$ und ersetzen diejenigen Punkte $a \epsilon N$, die zu $F = X - G = \overline{G} - G \subset G^1$ gehören, durch hinlänglich benachbarte Punkte $b \epsilon G$. So entsteht eine endliche Menge B mit $\varrho(A,B) < \delta$ und $BF = 0$, also $B \epsilon \mathfrak{G}$.

Nun sei $P = \prod_\xi X^\xi (= X^\alpha)$ der perfekte Kern von X, $S = X - P$ der separierte Teil von X und $Q = \underline{P}$ der offene Kern von P (es ist immer das Verschwinden einer dieser Mengen zugelassen). Ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{J}(P)$ die Menge der A mit perfektem AP, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{J}(Q)$ die Menge der A mit insichdichtem AQ, so ist

$$\mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}, \qquad \mathfrak{P} \text{ in } \mathfrak{X} \text{ dicht.}$$

Die erste Behauptung ist selbstverständlich, da jede in einer insichdichten Menge offene Menge insichdicht, mit AP also auch $APQ = AQ$ insichdicht ist. Zum Beweis der zweiten zeigen wir, dass in beliebiger Nähe von $A \epsilon \mathfrak{X}$ ein $B \epsilon \mathfrak{P}$ existiert, wobei wir $AP \neq 0$ annehmen (sonst wäre schon $A \epsilon \mathfrak{P}$). Es sei $U = U(AP, \delta)$ eine offene Kugel um AP mit Radius δ und $B = AS + \overline{UP}$. Es ist $UP \supset AP$, $B = A + \overline{UP}$ abgeschlossen, UP insichdicht und $BP = \overline{UP}$ perfekt, $B \epsilon \mathfrak{P}$; da ferner UP Summe endlich vieler $U(a, \delta)P$ mit $a \epsilon AP$ ist, so gibt es zu jedem Punkt von $\overline{UP}$ einen von AP im Abstand $\leqq \delta$, also zu jedem $b \epsilon B$ ein $a \epsilon A$ mit $\varrho(a, b) \leqq \delta$, also (wegen $A \subset B$) $\varrho(A, B) \leqq \delta$.

Nunmehr ist also auch $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{X}$ dicht und nach (15) ein G_δ, $\mathfrak{X} - \mathfrak{Q}$ von erster Kategorie.

Die abgeschlossene Menge $F = X^1 - Q$ ist nirgendsdicht; ihr Komplement $G = I + Q$ (I Menge der isolierten Punkte von X) ist dicht, da $\overline{G} \supset \overline{I} + Q = \overline{S} + \underline{P} = X$. Es ist

$$\mathfrak{J}(X^1) \subset \mathfrak{Q}, \qquad \mathfrak{J}(X^1) \subset \mathfrak{X}^1;$$

denn ist AX^1 perfekt, so ist $AX^1 \subset P$, $AX^1 = AP$ perfekt, $A \epsilon \mathfrak{P} \subset \mathfrak{Q}$; ferner $A^1 = AA^1 \subset AX^1 = AP = (AP)^1 \subset A^1$, also $A^1 = AP$ perfekt, $A^1 = A^2$, $A \epsilon \mathfrak{X}^1$. Nach (16) ist nun $\mathfrak{F} = \underset{A}{\mathrm{E}}[AX^1 \neq AQ]$ nirgendsdicht, $\mathfrak{Q} - \mathfrak{J}(X^1) \subset \mathfrak{F}$ nirgendsdicht, $\mathfrak{X} - \mathfrak{J}(X^1) = (\mathfrak{X} - \mathfrak{Q}) + (\mathfrak{Q} - \mathfrak{J}(X^1))$ von 1. Kategorie und $\mathfrak{X} - \mathfrak{X}^1$ von 1. Kategorie, q. e. d.

Die Menge $\underset{A}{\mathrm{E}}[AP=0] = \underset{A}{\mathrm{E}}[A \subset S]$ ist offen und enthält keine perfekte Menge $\epsilon \mathfrak{X}$, ist also, wenn X nicht perfekt ist, ein nicht leerer offener Teil von $\mathfrak{X} - \mathfrak{X}^0$, sodass $\mathfrak{X} - \mathfrak{X}^0$ dann noch nicht von 1. Kategorie ist. (Dasselbe kann man aus $\underset{A}{\mathrm{E}}[AX^1 = 0] = \underset{A}{\mathrm{E}}[A \subset I]$ schliessen). Ist hingegen $X = P = Q$ perfekt, so ist $\mathfrak{X}^0 = \mathfrak{J}(X) = \mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$ ein in $\mathfrak{X}$ dichtes G_δ und schon $\mathfrak{X} - \mathfrak{X}^0$ von 1. Kategorie.

---

[1]) Insbesondere ist die Menge $\mathfrak{J}(X)$ der perfekten A ein G_δ (Banach); vgl. Kuratowski, Fund. Math. 17 (1931), p. 260.